p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

# SỰ TỒN TẠI KHÔNG ĐIỂM CỦA PHIẾM HÀM TRÊN KHÔNG GIAN $(q_1, q_2)$-TỰA MÊTRIC VÀ ỨNG DỤNG

**Nguyễn Văn Lương[1], Hoàng Thị Hưng[2], Dương Thị Ánh Nguyệt[3]**

TÓM TẮT

*Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập một kết quả về sự tồn tại không điểm của các phiếm hàm không âm xác định trên không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric. Kết quả này bổ sung cho kết quả chính trong [L. V. Nguyen (2026), Sib. Math. J. 67, 219-234]. Ngoài ra, chúng tôi cũng thu được các kết quả về sự tồn tại điểm bất động và điểm trùng hợp cho các ánh xạ trong không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric.*

**Từ khóa:** *Phiếm hàm hầu $(k_1, k_2, \ell)$-tìm kiếm, không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric, điểm bất động, điểm trùng hợp.*

***DOI:*** *https://doi.org/10.70117/hdujs.84.2.2026.999*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ VÀ MỘT SỐ KẾT QUẢ CƠ BẢN

Khái niệm không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric được Arutyunov và Greshnov đưa ra năm 2016 trong bài báo [2], mở rộng nhiều khái niệm về không gian với hàm khoảng cách.

**Định nghĩa 1.1.** ([2]) Cho $X$ là một tập hợp khác rỗng và $q_1, q_2 \geq 1$ là các số thực dương. Một hàm $d: X \times X \to \mathbb{R}$ được gọi là một $(q_1, q_2)$-tựa mêtric trên $X$ nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau: với $x, y, z \in X$.

(i) $d(x, y) \geq 0$

(ii) $d(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$,

(iii) $d(x, y) \leq q_1 d(x, z) + q_2 d(z, y)$ (bất đẳng thức $(q_1, q_2)$-tam giác mở rộng).

Nếu $d$ là một $(q_1, q_2)$-tựa mêtric trên $X$, thì $(X, d)$ được gọi là một không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric. Nếu $(q_1, q_2)$-tựa mêtric $d$ thỏa mãn thêm điều kiện.

$$d(x, y) \leq q_0 d(y, x), \forall\, x, y \in X$$

với $q_0 > 0$, thì \$d\$ được gọi là $q_0$ $-$đối xứng và khi đó $(X, d)$ được gọi là không gian $q_0$-đối xứng.

Cho $(X, d)$ là một không gian $(q_1, q_2)$ - tựa mêtric. Nếu $(X, d)$ là không gian $q_0$-đối xứng với $q_0 = 1$, thì $d(x, y) = d(y, x)$ với mọi $x, y \in X$ và khi đó $(X, d)$ được gọi là không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric đối xứng. Nếu $q_1 = q_2 = s$, thì $(X, d)$ là không gian tựa $b$-mêtric với hằng số $s$ (xem trong [3]). Nếu $q_1 = q_2 = 1$, thì $(X, d)$ là không gian tựa mêtric. Nếu $q_0 = q_1 = q_2 = 1$, thì $(X, d)$ là không gian mêtric. Không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric là

[1] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức; Email: nguyenvanluong@hdu.edu.vn*
[2] *Phòng Tổ chức – Hành chính – Quản trị, Trường Đại học Hồng Đức.*
[3] *Học viên Cao học Toán Giải tích K17, Trường Đại học Hồng Đức.*

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

trường hợp đặc biệt của không gian $f$- tựa mêtric được giới thiệu và nghiên cứu trong [4]. Không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric xuất hiện một cách tự nhiên trong giải tích hàm và hình học phi-holonomic. Các không gian Carnot-Carathéodory chuẩn và các $C^1$-mở rộng của chúng, hay tựa mêtric hộp, là những ví dụ không tầm thường của không gian $(1, q_2)$ -tựa mêtric (xem [5, 6]).

Các vấn đề liên quan đến không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric đã được nhiều tác giả nghiên cứu. Cụ thể, các tính chất tôpô và hình học của không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric cũng như các không gian mở rộng đã được khảo sát trong các công trình [4, 5, 6, 7, 8, 9]. Arutyunov và Greshnov nghiên cứu sự tồn tại của các điểm trùng hợp cho ánh xạ Lipschitz và ánh xạ phủ trong các không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric trong [2, 10, 11]. Fomenko xem xét các kết quả về sự tồn tại không điểm của phiếm hàm $(\alpha, \beta)$-tìm kiếm trong không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric, đồng thời đưa ra các kết quả về điểm bất động và điểm trùng hợp cho cả ánh xạ đơn trị và đa trị, mở rộng một số kết quả trong [11]. Yang và Li [12] đề xuất một phiên bản của nguyên lý biến phân Ekeland cho song hàm trong không gian $(1, q_2)$-tựa mêtric, và áp dụng nó để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm cho bài toán tựa cân bằng. Sengupta và Zhukovskiy [13] chứng minh sự tồn tại cực tiểu cho phiếm hàm thỏa mãn điều kiện kiểu Caristi trên không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric, mở rộng kết quả của Arutyunov trong [14] cho phiếm hàm xác định trên không gian mêtric.

Trong bài báo gần đây [1], chúng tôi giới thiệu một lớp phiếm hàm, gọi là hầu $(k_1, k_2, \ell)$-tìm kiếm, mở rộng khái niệm $(\alpha, \beta)$-tìm kiếm của Fomenko, và nghiên cứu sự tồn tại không điểm của các phiếm hàm này. Kết quả thu được được áp dụng để nghiên cứu sự tồn tại điểm bất động và điểm trùng hợp của các ánh xạ trong không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric.

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và kết quả cơ bản trong không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric sẽ được sử dụng trong phần sau của bài báo này. Các khái niệm và kết quả này có thể tìm trong [2, 10, 11] và các tài liệu được trích dẫn trong đó.

Cho $(X, d)$ là một không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric. Với một điểm $x \in X$ và một số thực $r > 0$ cho trước, ta định nghĩa

$$O(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\} \quad \text{và} \quad B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

Như thường lệ, $O(x, r)$ và $B(x, r)$ lần lượt được gọi là hình cầu mở và hình cầu đóng tâm $x$ bán kính $r$.

Một tập con $A \subset X$ được gọi là mở nếu với mọi $a \in A$ tồn tại $r > 0$ sao cho $O(a, r) \subset A$. Tập hợp $\tau$ của tất cả các tập mở trong $X$ xác định một tôpô trên $X$. Một tập được gọi là đóng nếu phần bù của nó là tập mở. Ký hiệu bởi $C(X)$ tập tất cả các tập con đóng khác rỗng của $X$.

Mặc dù các hình cầu $O(x, r)$ và $B(x, r)$ lần lượt được gọi là "mở" và "đóng", nhưng $O(x, r)$ có thể không phải là tập mở và $B(x, r)$ có thể không phải là tập đóng (xem [5, Example 3.4]).

**Định nghĩa 1.2.** ([11]) Ta nói $(q_1, q_2)$ -tựa mêtric $d$ là đối xứng yếu nếu $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$ với $x \in X$ dẫn đến $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Không gian $(q_1, q_2)$- tựa mêtric $(X, d)$ được gọi là đối xứng yếu nếu $d$ là đối xứng yếu.

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Dễ thấy rằng mọi không gian $q_0$ −đối xứng đều là không gian đối xứng yếu. Tuy nhiên, điều ngược lại thì không đúng (xem [5]).

**Định nghĩa 1.3.** ([11]) Một dãy $\{x_n\}$ trong không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric $(X, d)$ được gọi là hội tụ tới một điểm $x \in X$ nếu $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$. Trong trường hợp này, ta viết $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ hoặc $x_n \to x$ và gọi $x$ là giới hạn của dãy $\{x_n\}$.

Lưu ý rằng tôpô $\tau$ thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất. Do đó, một tập con $A$ của $X$ là đóng khi và chỉ khi với mọi $a \in A$, tồn tại một dãy $\{x_n\} \subset A$ hội tụ tới $a$. Tuy nhiên, vì tôpô $\tau$ có thể không thỏa mãn tiên đề $T_1$, một dãy hội tụ có thể không có giới hạn duy nhất (xem [11, Example 3.5]). Ngược lại, nếu $(X, d)$ là một không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric đối xứng yếu thì mọi dãy hội tụ đều có giới hạn duy nhất.

**Định nghĩa 1.4.** ([11]) Một dãy $\{x_n\}$ trong không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric $(X, d)$ được gọi là dãy Cauchy nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số nguyên không âm $N_\varepsilon$ sao cho với mọi $m > n > N_\varepsilon$ ta có $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric $(X, d)$ được gọi là đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy trong $X$ đều có giới hạn trong $X$.

Khác với không gian mêtric, một dãy hội tụ trong không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric có thể không phải là một dãy Cauchy (xem [11]).

**Định nghĩa 1.5.** ([15]) Cho $f: X \to \mathbb{R}_+$ là một phiếm hàm không âm với đồ thị $\text{gph}(f) := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R}_+ : y = f(x)\}$.

(i) Ta nói rằng đồ thị của $f$ là 0-đóng nếu với bất kỳ dãy $\{(x_n, f(x_n)\} \subset \text{gph}(f)$ hội tụ tới $(x^*, 0) \in X \times \mathbb{R}_+$, thì $(x^*, 0) \in \text{gph}(f)$, tức là $f(x^*) = 0$.

(ii) Ta nói rằng đồ thị của $f$ là 0-đầy đủ nếu với bất kỳ dãy Cauchy $\{x_n\}$ trong $X$ mà $f(x_n)$ hội tụ tới 0, thì tồn tại $x^* \in X$ sao cho $x_n \to x^*$ và $f(x^*) = 0$.

**Định nghĩa 1.6.** ([1]) Cho $(X, d)$ là một không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric. Một phiếm hàm $f: X \to \mathbb{R}_+$ được gọi là hầu $(k_1, k_2, \ell)$-tìm kiếm trên $X$ với các hằng số $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ và $\ell > 0$ nếu với mọi $x \in X$ và $\delta > 0$, tồn tại $y \in X$ sao cho

$$f(y) \le k_1 f(x) + \delta \tag{1}$$

và

$$d(x, y) \le k_2 [f(x)]^\ell + \delta. \tag{2}$$

Với mỗi số thực không âm $\theta$ và số nguyên dương $n$, ta đặt

$$Q(\theta, n) = 1 + \theta + \cdots + \theta^{n-1}.$$

Ta qui ước $Q(\theta, 0) = 0$. Dễ thấy rằng nếu $n \le m$, thì $Q(\theta, n) \le Q(\theta, m)$.

Kết quả chính của bài báo [1] là định lý sau.

**Định lý 1.1.** *Cho $(X, d)$ là một không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric và $f: X \to \mathbb{R}_+$ là một phiếm hàm hầu $(k_1, k_2, \ell)$-tìm kiếm trên $X$ với $k_1 \in (0,1)$ sao cho $X$ là không gian đầy đủ và đồ thị của $f$ là 0-đóng, hoặc đồ thị của $f$ là 0-đầy đủ.*

*Đặt $m_0 = min\{i \in \mathbb{N}: q_2 k_1^{i\ell} < 1\}$ và lấy một điểm $x_0$ bất kỳ trong $X$. Khi đó, tồn tại $x^* \in X$ sao cho $f(x^*) = inf\{f(x): x \in X\} = 0$ và*

$$\limsup_{x\to x^*} d(x_0, x) \le \frac{q_1 k_2 \left[q_1 Q\left(q_2 k_1^\ell, m_0 - 1\right) + \left(q_2 k_1^\ell\right)^{m_0 - 1}\right]}{1 - q_2 k_1^{\ell m_0}} [f(x_0)]^\ell. \tag{3}$$

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

*Nếu $(X,d)$ là không gian đối xứng yếu, thì $x^*$ thỏa mãn ước lượng*

$$d(x_0,x^*) \le \frac{q_1^2 k_2\left[q_1 Q\left(q_2 k_1^\ell, m_0-1\right)+\left(q_2 k_1^\ell\right)^{m_0-1}\right]}{1-q_2 k_1^{\ell m_0}}[f(x_0)]^\ell. \tag{4}$$

*Hơn nữa, nếu $(X,d)$ là không gian $q_0$-đối xứng, thì $x^*$ thỏa mãn ước lượng*

$$d(x^*,x_0) \le \frac{q_0 q_1 q_2 k_2\left[q_1 Q\left(q_2 k_1^\ell, m_0-1\right)+\left(q_2 k_1^\ell\right)^{m_0-1}\right]}{1-q_2 k_1^{\ell m_0}}[f(x_0)]^\ell. \tag{5}$$

Mục đích của bài báo này là đưa ra một kết quả về sự tồn tại không điểm cho phiếm hàm hầu $(k_1,k_2,\ell)$-tìm kiếm trong không gian $(q_1,q_2)$-tựa mêtric, bổ sung cho Định lý 1.1 - kết quả chính trong bài báo [1]. Kết quả này cũng được áp dụng để thiết lập một số kết quả về sự tồn tại điểm trùng hợp cho các ánh xạ trong không gian $(q_1,q_2)$-tựa mêtric.

## 2. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Kết quả chính của bài báo này được phát biểu như sau.

**Định lý 2.1.** *Cho $(X,d)$ là một không gian $(q_1,q_2)$-tựa mêtric $q_0$-đối xứng và $f: X \to \mathbb{R}_+$ là một phiếm hàm hầu $(k_1,k_2,\ell)$-tìm kiếm trên $X$ với $k_1 \in (0,1)$ sao cho $X$ là không gian đầy đủ và đồ thị của $f$ là 0-đóng, hoặc đồ thị của $f$ là 0-đầy đủ. Đặt $n_0 = min\{i \in \mathbb{N}: \ q_1 k_1^{i\ell} < 1\}$ và lấy một điểm $x_0$ bất kỳ trong $X$. Khi đó, tồn tại $x^* \in X$ sao cho $f(x^*) = 0$ và*

$$d(x_0,x^*) \le \frac{q_0^2 q_1 q_2 k_2\left[q_2 Q\left(q_1 k_1^\ell, n_0-1\right)+\left(q_1 k_1^\ell\right)^{n_0-1}\right]}{1-q_1 k_1^{\ell n_0}}[f(x_0)]^\ell. \tag{6}$$

*Chứng minh*. Lấy $\varepsilon$ bất kỳ trong $(0,1)$. Bằng phương pháp quy nạp, ta sẽ xây dựng một dãy$\{x_n\}$ trong $X$ thỏa mãn

$$f(x_n) \le k_1 f(x_{n-1}) + \frac{\varepsilon k_1^n}{2^n} \tag{7}$$

và

$$d(x_{n-1},x_n) \le k_2[f(x_{n-1})]^\ell + \varepsilon k_2 k_1^{(n-1)\ell} \tag{8}$$

với mọi $n \ge 1$.

Thật vậy, vì $f$ là phiếm hàm hầu $(k_1,k_2,\ell)$-tìm kiếm trên $X$, nên với $x_0 \in X$ và $\delta_1 = \min\left\{\frac{\varepsilon k_1}{2}, \varepsilon k_2\right\}$, tồn tại $x_1 \in X$ sao cho

$$f(x_1) \le k_1 f(x_0) + \delta_1 \le k_1 f(x_0) + \frac{\varepsilon k_1}{2},$$

và:

$$d(x_0,x_1) \le k_2[f(x_0)]^\ell + \delta_1 \le k_2[f(x_0)]^\ell + \varepsilon k_2.$$

Tức là ta xây dựng được $x_1$ sao cho (7) và (8) thỏa mãn với $n=1$.

Giả sử ta xây dựng được các điểm $x_1,\cdots,x_k$ trong $X$ sao cho (7) và (8) đúng với $n=1,\cdots,k$. Ta sẽ xây dựng điểm $x_{k+1}$ trong $X$ sao cho (7) và (8) đúng với $n=k+1$. Vì

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

$f$ là phiếm hàm hầu $(k_1, k_2, \ell)$-tìm kiếm trên $X$, nên với điểm $x_k \in X$ và $\delta_{k+1} = \min\left\{\varepsilon \ \frac{k_1^{k+1}}{2^{k+1}}, \varepsilon\, k_2 k_1^{k\ell}\right\}$, tồn tại $x_{k+1} \in X$ sao cho

$$f(x_{k+1}) \leq k_1 f(x_k) + \delta_{k+1} \leq k_1 f(x_k) + \frac{\varepsilon k_1^{k+1}}{2^{k+1}}$$

và:

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq k_2[f(x_k)]^\ell + \delta_{k+1} \leq k_2[f(x_k)]^\ell + \varepsilon k_2 k_1^{k\ell}.$$

Như vậy, ta đã xây dựng được $x_{k+1} \in X$ để (7) và (8) đúng với $n = k+1$. Theo quy nạp toán học, ta xây dựng được dãy $\{x_n\} \subset X$ thỏa mãn (7) và (8) với mọi $n \geq 1$.

Theo (7), ta có với mọi $n \geq 1$ rằng

$$\begin{aligned} f(x_n) &\leq k_1 f(x_{n-1}) + \frac{\varepsilon k_1^n}{2^n} \\ &\leq k_1\left[k_1 f(x_{n-2}) + \frac{\varepsilon k_1^{n-1}}{2^{n-1}}\right] + \frac{\varepsilon k_1^n}{2^n} \\ &= k_1^2 f(x_{n-2}) + \varepsilon k_1^n\left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\leq \cdots \\ &\leq k_1^n f(x_0) + \varepsilon k_1^n\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\leq k_1^n(f(x_0) + \varepsilon). \end{aligned} \tag{9}$$

Vì $k_1 \in (0,1)$ và $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in X$, nên từ (9) ta thu được

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

Từ (8) và (9), ta có

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq k_2[f(x_n)]^\ell + \varepsilon k_2 k_1^{n\ell} \\ &\leq k_2[k_1^n(f(x_0) + \varepsilon)]^\ell + \varepsilon\, k_2 k_1^{n\ell} \\ &= k_2[(f(x_0) + \varepsilon)^\ell + \varepsilon] k_1^{n\ell} = c\lambda^n \end{aligned} \tag{10}$$

với mọi $n$. Ở đây, $c = k_2[(f(x_0) + \varepsilon)^\ell + \varepsilon]$ và $\lambda = k_1^\ell \in (0,1)$.

Tiếp theo ta chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong $X$. Với mọi số nguyên $m \geq 0$ và $i \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned} d(x_{m+i}, x_m) &\leq q_1 d(x_{m+i}, x_{m+1}) + q_2 d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq q_1^2 d(x_{m+i}, x_{m+2}) + q_2 q_1 d(x_{m+2}, x_{m+1}) + q_2 d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq \cdots \\ &\leq q_1^{i-1} d(x_{m+i}, x_{m+i-1}) + q_2 q_1^{i-2} d(x_{m+i-1}, x_{m+i-2}) \\ &\quad + \cdots + q_2 q_1 d(x_{m+2}, x_{m+1}) + q_2 d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq q_1^{i-1} c q_0 \lambda^{m+i-1} + q_2 q_1^{i-2} c q_0 \lambda^{m+i-2} + \cdots + q_2 q_1 c q_0 \lambda^{m+1} + q_2 c q_0 \lambda^m \\ &= c q_0 \lambda^m (q_1 \lambda)^{i-1} + c q_2 q_0 \lambda^m [(q_1\lambda)^{i-1} + \cdots + q_1\lambda + 1] \\ &= c q_0 \lambda^m [q_2 Q(q_1\lambda, i-1) + (q_1\lambda)^{i-1}]. \end{aligned} \tag{11}$$

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Giả sử $n$ và $k$ là các số nguyên với $n \geq 0$ và $k \geq 1$. Đặt $p = \left[\frac{k}{n_0}\right]$ là phần nguyên của $\frac{k}{n_0}$. Khi đó, $0 \leq k - pn_0 \leq n_0 - 1$. Nếu $k$ chia hết cho $n_0$, thì $d(x_{n+pn_0}, x_{n+k}) = 0$. Nếu $k$ không chia hết cho $n_0$ thì $n_0 > 1$ và $k - pn_0 \geq 1$. Trong trường hợp này, $q_1\lambda \geq 1$ và $q_1\lambda^{k-pn_0-1} \leq (q_1\lambda)^{n_0-1}$. Khi đó, theo (11), ta có

$$\begin{aligned} d\left(x_{n+k}, x_{n+pn_0}\right) &\leq cq_0\, \lambda^{n+pn_0}[q_2Q(q_1\lambda, k - pn_0 - 1) + (q_1\lambda)^{k-pn_0-1}] \\ &\leq cq_0\, \lambda^{n+pn_0}[q_2Q(q_1\lambda, n_0 - 1) + (q_1\lambda)^{n_0-1}]. \end{aligned}$$

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có

$$d\left(x_{n+k}, x_{n+pn_0}\right) \leq cq_0\, \lambda^{n+pn_0}[q_2Q(q_1\lambda, n_0 - 1) + (q_1\lambda)^{n_0-1}]. \tag{12}$$

Sử dụng (11), (12) và tính $q_0$-đối xứng của $d$, ta được:

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq q_1 d\left(x_{n+k}, x_{n+n_0}\right) + q_2 d(x_{n+n_0}, x_n) \\ &\leq q_1^2 d\left(x_{n+k}, x_{n+2n_0}\right) + q_2q_1 d\left(x_{n+2n_0}, x_{n+n_0}\right) + q_2 d(x_{n+n_0}, x_n) \\ &\leq \cdots \\ &\leq q_1^p d\left(x_{n+k}, x_{n+pn_0}\right) + q_2q_1^{p-1} d\left(x_{n+pn_0}, x_{n+(p-1)n_0}\right) + \cdots \\ &\quad + q_2q_1 d\left(x_{n+2n_0}, x_{n+n_0}\right) + q_2 d(x_{n+n_0}, x_n) \\ &\leq q_1^p cq_0\lambda^{n+pn_0}[q_2Q(q_1\lambda, n_0 - 1) + (q_1\lambda)^{n_0-1}] \\ &\quad + q_2q_1^{p-1} cq_0\lambda^{n+(p-1)n_0}[q_2Q(q_1\lambda, n_0 - 1) + (q_1\lambda)^{n_0-1}] + \cdots \\ &\quad + q_2q_1cq_0\lambda^{n+n_0}[q_2Q(q_1\lambda, n_0 - 1) + (q_1\lambda)^{n_0-1}] \\ &\quad + q_2cq_0\lambda^{n}[q_2Q(q_1\lambda, n_0 - 1) + (q_1\lambda)^{n_0-1}] \\ &\leq q_2cq_0\lambda^{n}[q_2Q(q_1\lambda, n_0 - 1) + (q_1\lambda)^{n_0-1}] \\ &\quad \times [1 + q_1\lambda^{n_0} + \cdots + (q_1\lambda^{n_0})^{p-1} + (q_1\lambda^{n_0})^{p}] \\ &\leq \frac{cq_0q_2\lambda^{n}[q_2Q(q_1\lambda, n_0 - 1) + (q_1\lambda)^{n_0-1}]}{1 - q_1\lambda^{n_0}}. \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq \frac{cq_0^2q_2\lambda^{n}[q_2Q(q_1\lambda, n_0 - 1) + (q_1\lambda)^{n_0-1}]}{1 - q_1\lambda^{n_0}} \tag{13}$$

với mọi số nguyên dương $n \geq 0$ và $k \geq 1$. Do $\lambda \in (0,1)$, từ (13) ta suy ra $\{x_k\}$ là một dãy Cauchy trong $X$.

Giả sử $(X, d)$ là không gian đầy đủ và đồ thị của $f$ là 0-đóng. Vì $X$ đầy đủ và $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong $X$ nên tồn tại $x^* \in X$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Vì $\left(x_n, f(x_n)\right) \in \operatorname{gph}(f)$ và $\left(x_n, f(x_n)\right) \to (x^*, 0)$ khi $n \to \infty$ và $\operatorname{gph}(f)$ là 0-đóng, nên ta có $f(x^*) = 0$. Giả sử đồ thị của $f$ là 0-đầy đủ. Vì $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong $X$ và $f(x_n) \to 0$, nên tồn tại $x^* \in X$ sao cho $x_n \to x^*$ và $f(x^*) = 0$. Tóm lại, trong mọi trường hợp, tồn tại $x^* \in X$ sao cho $x_n \to x^*$ và $f(x^*) = 0$.

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Cho $n = 0$ trong (13) ta được

$$d(x_0, x_k) \leq \frac{cq_0^2 q_2[q_2 Q(q_1\lambda, n_0 - 1) + (q_1\lambda)^{n_0-1}]}{1 - q_1\lambda^{n_0}}, \quad \forall\, k \geq 1. \tag{14}$$

Với mọi $k \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned} d(x_0, x^*) &\leq q_1 d(x_0, x_k) + q_2 d(x_k, x^*) \\ &\leq \frac{cq_0^2 q_1 q_2[q_2 Q(q_1\lambda, n_0 - 1) + (q_1\lambda)^{n_0-1}]}{1 - q_1\lambda^{n_0}} + q_0 q_2 d(x^*, x_k). \end{aligned}$$

Lấy giới hạn hai vế khi $n \to \infty$ , ta được

$$d(x_0, x^*) \leq \frac{cq_0^2 q_1 q_2[q_2 Q(q_1\lambda, n_0 - 1) + (q_1\lambda)^{n_0-1}]}{1 - q_1\lambda^{n_0}}.$$

Vì $c \to k_2[f(x_0)]^\ell$ khi $\varepsilon \to 0$, nên lấy giới hạn hai vế bất đẳng thức trên khi $\varepsilon \to 0$, ta được

$$d(x_0, x^*) \leq \frac{q_0^2 q_1 q_2 k_2[q_2 Q(q_1\lambda, n_0 - 1) + (q_1\lambda)^{n_0-1}]}{1 - q_1\lambda^{n_0}}[f(x_0)]^\ell.$$

Định lý được chứng minh.

Từ định lý trên ta có hệ quả sau.

**Hệ quả 2.2**. *Cho $(X, d)$ là một không gian $(q_1, q_2)$- tựa mêtric $q_0$-đối xứng và $f: X \to \mathbb{R}_+$ là một phiếm hàm trên $X$ sao cho $X$ là không gian đầy đủ và đồ thị của $f$ là 0-đóng, hoặc đồ thị của $f$ là 0-đầy đủ. Giả sử tồn tại các hằng số $k_1 \in (0,1)$, $k_2, \ell > 0$ sao cho với mỗi $x \in X$, tồn tại $y \in X$ thỏa mãn*

$$f(y) \leq k_1 f(x)$$

*và*

$$d(x, y) \leq k_2[f(x)]^\ell.$$

*Đặt $n_0 = min\{i \in \mathbb{N}: \ q_1 k_1^{i\ell} < 1\}$ và lấy một điểm $x_0$ bất kỳ trong $X$. Khi đó, tồn tại $x^* \in X$ sao cho $f(x^*) = 0$ và*

$$d(x_0, x^*) \leq \frac{q_0^2 q_1 q_2 k_2 \left[q_2 Q\left(q_1 k_1^\ell, n_0 - 1\right) + \left(q_1 k_1^\ell\right)^{n_0-1}\right]}{1 - q_1 k_1^{\ell n_0}}[f(x_0)]^\ell.$$

Tiếp theo chúng tôi áp dụng các kết quả trên để đưa ra một số định lý về điểm bất động và điểm trùng hợp cho các ánh xạ trong không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric.

**Định lý 2.3.** *Cho $(X, d)$ là một không gian $(q_1, q_2)$- tựa mêtric $q_0$-đối xứng và $S: X \to C(X)$ là một ánh xạ sao cho $X$ là không gian đầy đủ và đồ thị của hàm số $f(x) = d(x, S(x))$ là 0-đóng hoặc đồ thị của $f$ là 0-đầy đủ. Giả sử tồn tại $k_1 \in (0,1)$, $k_2, \ell > 0$ sao cho với mỗi $x \in X$, tồn tại $y \in X$ thỏa mãn*

$$\boldsymbol{d(y, S(y)) \leq k_1 d(x, S(x))},$$

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

*và*

$$\boldsymbol{d(x,y) \leq k_2\left[d\left(x,S(x)\right)\right]^{\ell}}.$$

*Đặt* $n_0 = min\{i \in \mathbb{N}: \ q_1 k_1^{i\ell} < 1\}$ *và lấy một điểm* $x_0$ *bất kỳ trong* $X$. *Khi đó,* $S$ *có một điểm bất động* $x^* \in X$, *tức là,* $x^* \in S(x^*)$, *thỏa mãn*

$$d(x_0,x^*) \leq \frac{q_0^2 q_1 q_2 k_2\left[q_2 Q\left(q_1 k_1^{\ell}, n_0 - 1\right) + \left(q_1 k_1^{\ell}\right)^{n_0-1}\right]}{1 - q_1 k_1^{\ell n_0}}[d(x_0,S(x_0))]^{\ell}.$$

*Chứng minh*. Áp dụng Hệ quả 2.2 cho $f(x) = d(x,S(x))$, khi đó tồn tại $x^* \in X$ sao cho $f(x^*) = d(x^*,S(x^*)) = 0$. Do $S(x^*)$ là tập đóng nên $x^* \in S(x^*)$. Do đó, $x^*$ là điểm bất động của $S$. ■

**Định lý 2.4**. *Cho* $(X,d)$ *là một không gian* $(q_1,q_2)$*- tựa mêtric* $q_0$*-đối xứng,* $(Y,d_Y)$ *là không gian* $(q_1',q_2')$*-tựa mêtric,* $\varphi,\phi: X \to Y$ *là các ánh xạ và* $f: X \to \mathbb{R}$ *xác định bởi* $f(x) = d_Y(\varphi(x),\phi(x))$ *với mọi* $x \in X$. *Giả sử hoặc* $(X,d_X)$ *là không gian đầy đủ và* $gph(f)$ *là 0-đóng hoặc* $gph(f)$ *là 0- đầy đủ. Giả sử tồn tại* $k_1 \in (0,1)$, $k_2,\ell > 0$ *sao cho với mỗi* $x \in X$, *tồn tại* $x' \in X$ *sao cho*

$$\boldsymbol{d_Y(\varphi(x'),\phi(x') \leq k_1 d_Y\left(\varphi(x),\phi(x)\right)},$$

và

$$\boldsymbol{d(x,y) \leq k_2\left[d_Y\left(\varphi(x),\phi(x)\right)\right]^{\ell}}.$$

*Đặt* $n_0 = min\{i \in \mathbb{N}: \ q_1 k_1^{i\ell} < 1\}$ *và lấy một điểm* $x_0$ *bất kỳ trong* $X$. *Khi đó,* $\varphi$ *và* $\phi$ *có một điểm trùng hợp* $x^* \in X$, *tức là* $\varphi(x^*) = \phi(x^*)$, *thỏa mãn*

$$d(x_0,x^*) \leq \frac{q_0^2 q_1 q_2 k_2\left[q_2 Q\left(q_1 k_1^{\ell}, n_0 - 1\right) + \left(q_1 k_1^{\ell}\right)^{n_0-1}\right]}{1 - q_1 k_1^{\ell n_0}}\left[d_Y\left(\varphi(x_0),\phi(x_0)\right)\right]^{\ell}.$$

*Chứng minh*. Áp dụng Hệ quả 2.2 cho phiếm hàm $f(x) = d_Y\left(\varphi(x),\phi(x)\right)$ với mọi $x \in X$.■

Một số điều kiện đủ để phiếm hàm $f$ (xác định như trong Định lý 2.3 và Định lý 2.4) có đồ thị 0-đóng hoặc 0-đầy đủ có thể tham khảo trong [1].

## 3. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã thiết lập một kết quả tồn tại không điểm cho phiếm hàm hầu $(k_1,k_2,\ell)$-tìm kiếm trong không gian $(q_1,q_2)$-tựa mêtric, bổ sung cho kết quả chính trong [1]. Kết quả này kéo theo một số hệ quả quan trọng về sự tồn tại điểm bất động và điểm trùng hợp của các ánh xạ trong không gian $(q_1,q_2)$-tựa mêtric.

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Các hướng nghiên cứu tiếp theo có thể bao gồm việc khảo sát các lớp phiếm hàm hoặc ánh xạ tổng quát hơn (chẳng hạn ánh xạ đa trị), cũng như mở rộng các kết quả sang khuôn khổ nguyên lý biến phân hoặc bài toán cân bằng. Những nghiên cứu này hứa hẹn sẽ làm sáng tỏ hơn vai trò và ứng dụng của không gian $(q_1, q_2)$-tựa mêtric trong giải tích phi tuyến và lý thuyết tối ưu.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] L. V. Nguyen (2026), *Minimization theorems in $(q_1, q_2)$-quasimetric spaces with applications*, Sib. Math. J. 67, 219-234.

[2] A. V. Arutyunov, A.V. Greshnov (2016), *The theory of $(q_1, q_2)$-quasimetric spaces and coincidence points,* Dokl. Math. 469, 434-437.

[3] M. H. Shah, N. Hussain (2012), *Nonlinear contractions in partially ordered quasi-b-metric spaces,* Commun. Korean Math. Soc. 27, 117-128.

[4] A. V. Arutyunov, A.V. Greshnov, L. V. Lokutsievskii, and K. V. Storozhuk (2017), *Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric $f$ -quasimetrics*, Topol Appl. 221, 178-194.

[5] A. V. Greshnov, M. V. Tryamkin (2015), *Exact values of constants in the generalized triangle inequality for some $(1, q_2)$-quasimetrics on canonical carnot groups,* Math. Notes. 98, 694-698.

[6] A. V. Greshnov (2021), *On finding the exact values of the constant in a $(1, q_2)$-generalized triangle inequality for box-quasimetrics on 2-step Carnot groups with 1-dimensional center*, Sib. Electron. Math. Rep. 18, 1251-1260.

[7] A. V. Greshnov (2017), *$(q_1, q_2)$ - quasimetrics bi-Lipschitz equivalent to $1$ - quasimetrics,* Sib. Adv. Math. 27, 253-262.

[8] A. V. Greshnov (2020), *Distance functions between sets in $(q_1, q_2)$-quasimetric spaces*, Sib. Math. J. 61, 417- 425.

[9] R. Sengupta (2017), *On fixed points of contraction maps acting in $(q_1, q_2)$-quasimetric spaces and geometric properties of these spaces*, Eurasian Math. J. 8, 70-76.

[10] A. V. Arutyunov, A.V. Greshnov (2017), *Coincidence points of set-valued maps in $(q_1, q_2)$-quasimetric spaces*, Dokl. Math. 476, 129-132.

[11] A. V. Arutyunov, A.V. Greshnov (2018), *$(q_1, q_2)$ - quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points*, Izv. Math. 82, 245-272.

[12] H. Yang, J. Li (2023), *Ekeland variational principle in complete weakly symmetric $(1, q_2)$-quasimetric spaces and applications*, Optimization. 72, 1261-1284.

[13] R. Sengupta, S. E. Zhukovskiy (2019), *Minima of functions on $(q_1, q_2)$-quasimetric spaces*, Eurasian Math. J. 10, 84-92.

[14] A. V. Arutyunov (2015), *Caristi's condition and existence of a minimum of a lower bounded function in a metric space. Applications to the theory of coincidence points,* Proc. Steklov Inst. Math. 291, 24-37.

[15] T. N. Fomenko (2019), *Search for zeros of functionals, fixed points, and mappings coincidence in quasi-metric spaces*, Moscow Univ. Math. Bull. 74, 227-234.

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

# THE EXISTENCE OF ZEROS OF FUNCTIONALS IN $(q_1, q_2)$-QUASIMETRIC SPACES AND APPLICATIONS

**Nguyen Van Luong, Hoang Thi Hung, Duong Thi Anh Nguyet**

ABSTRACT

*In this paper, we establish a result on the existence of zeros of nonnegative functionals defined on $(q_1, q_2)$-quasimetric spaces. This result complements the main result in [L. V. Nguyen (2026), Sib. Math. J. 67, 219-234]. Moreover, as a direct consequence, we also obtain results on the existence of fixed points and coincidence points for mappings in $(q_1, q_2)$-quasimetric spaces.*

**Keywords:** *Almost $(k_1, k_2, \ell)$-search functionals, $(q_1, q_2)$-quasimetric spaces, fixed points, coincidence points.*

** Ngày nộp bài:03/09/2025; Ngày gửi phản biện:21/09/2025; Ngày duyệt đăng: 28/02/2026*