

PHÂN TÍCH BẤT KHẢ QUY CỦA IDEAN TRONG VÀNH CHÍNH

Lê Xuân Dũng¹, Nguyễn Thị Hải Yến²

TÓM TẮT

Bài báo đưa ra một chứng minh chi tiết công thức phân tích bất khả quy của các ideal trong vành chính, qua đó xác định mối liên hệ giữa phân tích đa thức thành tích các đa thức bất khả quy với phân tích ideal thành giao của các ideal bất khả quy trong vành đa thức hệ số thực và hệ số phức.

Từ khóa: Vành chính, ideal chính, ideal bất khả quy, phân tích bất khả quy.

DOI: <https://doi.org/10.70117/hdujs.79.09.2025.964>

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Phân tích bất khả quy của ideal trong vành R không chỉ là một công cụ lý thuyết mà còn có nhiều ứng dụng trong hình học đại số, đại số giao hoán và toán học tính toán. Nó giúp ta hiểu cấu trúc của ideal thông qua các thành phần đơn giản, bên cạnh đó nó liên kết giữa đại số và hình học (thông qua tương ứng giữa ideal và tập nghiệm). Ngoài ra, phân tích bất khả quy làm nền tảng cho các phân tích phức tạp hơn như phân tích nguyên sơ. Ideal bất khả quy là ideal không phân tích được thành giao của hai ideal thực sự chứa nó, ngoài ra mọi ideal trong vành Noether đều phân tích được thành giao hữu hạn các ideal bất khả quy và ideal bất khả quy cũng là ideal nguyên sơ, do đó các ideal trong vành Noether đều phân tích được thành giao hữu hạn của các ideal nguyên sơ [1,2]. Đối với phân tích bất khả quy, trong vành đa thức nhiều biến, J. Herzog-T. Hibi [3], chứng tỏ rằng mọi ideal đơn thức đều phân tích được thành giao của các ideal sinh bởi một số biến nào đó, các ideal này là bất khả quy. Trong một số trường hợp khác, tìm phân tích bất khả quy của ideal cũng được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu [4,5,6,7].

Cho R là vành nhân tử hoá, với mọi phần tử x của R , x có dạng $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$, trong đó $p_1, p_2, \dots, p_t$ là các phần tử nguyên tố (p gọi là nguyên tố nếu p là ước của xy thì hoặc p là ước của x hoặc p là ước của y , trong [8] giới thiệu công thức $(x) = (p_1^{a_1}) \cap (p_2^{a_2}) \cap \dots \cap (p_t^{a_t})$ và chưa đưa ra chứng minh tường minh cho công thức này.

Mục đích của bài báo là đưa ra một chứng minh chi tiết công thức phân tích bất khả quy của các ideal trong vành chính, qua đó xác định được mối liên hệ giữa phân tích đa thức thành tích các đa thức bất khả quy với phân tích ideal thành giao của các ideal bất khả quy trong vành đa thức hệ số thực và hệ số phức.

Ngoài phần giới thiệu, bài báo chia thành hai mục. Mục 2 giới thiệu một số kiến thức cơ bản về vành chính. Mục 3 trình bày các kết quả chính của bài báo trong vành chính, trước hết là phân tích ideal bất kỳ thành giao của các ideal bất khả quy (Định lý 3.3, Định lý 3.4), xác định mối liên hệ giữa phân tích một đa thức thành các tích các đa thức bất khả quy với phân tích ideal trong vành đa thức trên trường số thực và trường số phức thành giao của các ideal bất khả quy (Định lý 3.7, Định lý 3.8).

¹ Phòng Tổ chức - Hành chính - Quản trị, Trường Đại học Hồng Đức; Email: lexuandung@hdu.edu.vn

² Học viên cao học lớp K16 Đại số, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

2. VÀNH CHÍNH

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu về phần tử bất khả quy, idêan và một số tính chất của vành chính dựa trên các tài liệu [1][2][8] và [9]. Trong bài báo, ta luôn giả thiết R là một miền nguyên.

Định nghĩa 2.1. (Xem [1, Chapter 1] và [9, Chương V]) Miền nguyên R được gọi là một vành chính nếu mọi idêan của R đều là idêan chính (tức là mọi idêan đều có thể sinh bởi một phần tử duy nhất).

Định nghĩa 2.2 (Xem [8, Chapter 0] và [9, Chương V]) Cho R là một miền nguyên. Một phần tử khác không $x \in R$ được gọi là *bất khả quy* nếu

- i) x không khả nghịch,
- ii) Nếu $x = yz$ với $y, z \in R$, thì y khả nghịch hoặc z khả nghịch.

Định lý 2.3. (Xem [8, Chapter 0] và [9, Chương V]) Cho R là vành chính, mọi phần tử x khác 0 và không khả nghịch đều có thể phân tích thành tích hữu hạn các phần tử bất khả quy, nghĩa là $x = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$, trong đó, p_i là các phần tử bất khả quy và n_i ($i = 1, 2, \dots, k$) là các số tự nhiên. Biểu diễn đó là duy nhất sai khác các phần tử khả nghịch, nghĩa là nếu $x = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k} = q_1^{m_1} \dots q_t^{m_t}$, trong đó p_i, q_j là các phần tử bất khả quy và n_i ($i = 1, 2, \dots, k$), m_j ($j = 1, 2, \dots, t$) là các số tự nhiên thì $k = t$ và với một sự đánh số thích hợp ta có $q_i = u_i p_i$, $n_i = m_i$, u_i là các phần tử khả nghịch ($i = 1, 2, \dots, k$).

Định nghĩa 2.4. (Xem [9, Chương V]) i) Cho vành giao hoán R và hai phần tử a, b thuộc R . Phần tử a được gọi là một *ước* của b nếu tồn tại c thuộc R sao cho $b = ac$, kí hiệu $a|b$. Ta còn nói b chia hết cho a .

ii) Phần tử a được gọi là một *ước chung* của hai phần tử b và c , nếu a là ước của b và a là ước của c .

iii) Phần tử p được gọi là một *ước chung lớn nhất* của b và c nếu mọi ước chung của b và c đều là ước của p , kí hiệu $(b, c) = p$. Trong trường hợp $(b, c) = 1$, ta nói b và c là hai phần tử nguyên tố cùng nhau.

Bổ đề 2.5. Cho x, y thuộc R sao cho x là phần tử bất khả quy và $y|x^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{N}$. Khi đó, y có dạng $y = ux^\beta$, trong đó $0 \leq \beta \leq \alpha$ và u là phần tử khả nghịch.

Chứng minh

Chứng minh quy nạp theo α . Với $\alpha = 0$ khi đó $y|x^0 = 1$ suy ra y là phần tử khả nghịch u . Do đó $y = u.1 = u.x^0$. Giả sử bài toán đúng đến α nghĩa là $y|x^\alpha$ thì $y = ux^\beta$, $0 \leq \beta \leq \alpha$, trong đó u khả nghịch. Ta cần chứng minh đúng đến $\alpha + 1$, nghĩa là nếu $y|x^{\alpha+1}$ thì y có dạng $y = u.x^\beta$, $0 \leq \beta \leq \alpha + 1$, trong đó u khả nghịch.

Trường hợp 1: Giả sử y khả nghịch, khi đó ta có thể viết $y = u.x^0$ (tương ứng với $\beta = 0$).

Trường hợp 2: Giả sử y không khả nghịch, suy ra $(x, y) = 1$. Khi đó từ $y|x^{\alpha+1}$ hay $y|x^\alpha.x$. Suy ra $y|x^\alpha$. Theo giả thiết quy nạp, ta có $y = u.x^\beta$, $0 \leq \beta \leq \alpha$. Do y không khả nghịch và $(x, y) = 1$ nên trường hợp này không xảy ra.

Trường hợp 3: y không khả nghịch và $x \mid y$, nghĩa là $\exists y' \in R$ sao cho $y = x.y'$. Do $y \mid x^{\alpha+1}$ nên tồn tại a sao cho $x^{\alpha+1} = y.a$. Suy ra $x^{\alpha+1} = x.y'.a$ dẫn đến $x^\alpha = y'.a$. Hay $y' \mid x^\alpha$. Theo giả thiết quy nạp ta có $y' = v.x^\beta$. Trong đó $0 \leq \beta \leq \alpha$ và v là phần tử khả nghịch. Do đó $y = x.x^\beta = x^{\beta+1}$. Vậy $y = u.x^\gamma$, trong đó u là phần tử khả nghịch và $0 \leq \gamma \leq \alpha + 1$.

Định nghĩa 2.6. (Xem [2, Chapter 4]) Idêan I của R được gọi là idêan bất khả quy nếu $I = J_1 \cap J_2$, trong đó J_1, J_2 là các idêan thực sự của R , thì $I = J_1$ hoặc $I = J_2$.

Bổ đề 2.7. Cho x là một phần tử bất khả quy của miền nguyên R . Khi đó idêan (x^α) là idêan bất khả quy với mọi $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh

Giả sử $(x^\alpha) = J_1 \cap J_2$, trong đó J_1, J_2 là các idêan thực sự của R . Do R là vành chính, nên J_1, J_2 là các idêan chính, do đó tồn tại $u, v \in R$ sao cho $J_1 = (u), J_2 = (v)$. Nghĩa là $(x^\alpha) = (u) \cap (v)$.

Suy ra $(x^\alpha) \subseteq (u)$ và $(x^\alpha) \subseteq (v)$ hay $x^\alpha \in (u)$ và $x^\alpha \in (v)$ dẫn đến $u \nmid x^\alpha$. Theo Bổ đề 2.5, ta có $u = ax^\beta$ ($0 \leq \beta \leq \alpha$), $v = bx^\gamma$ ($0 \leq \gamma \leq \alpha$), trong đó a, b là các phần tử khả nghịch của R . Giả sử $0 \leq \beta < \alpha - 1$ và $0 \leq \gamma < \alpha - 1$.

Khi đó $(u) = (x^\beta) \supsetneq (x^\alpha)$ và $(v) = (x^\gamma) \supsetneq (x^\alpha)$.

Suy ra $(u) \cap (v) \supsetneq (x^\alpha)$. Mâu thuẫn với $(u) \cap (v) = (x^\alpha)$. Do đó, ta phải có hoặc $\beta = \alpha$ hoặc $\gamma = \alpha$ hay hoặc $J_1 = (x^\alpha)$ hoặc $J_2 = (x^\alpha)$. Dẫn đến (x^α) là idêan bất khả quy.

3. PHÂN TÍCH BẤT KHẢ QUY CỦA IDÊAN

Mục cuối này, chúng tôi trình bày phân tích của idêan trong vành chính thành giao của các idêan bất khả quy dựa trên tài liệu [8], từ đó xét trên vành đa thức một biến.

Định nghĩa 3.1. Cho R là vành giao hoán có đơn vị và I là idêan của R . Nếu I được phân tích dưới dạng $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_t$, trong đó $Q_1, \dots, Q_t$ là các idêan bất khả quy của R , thì phân tích này được gọi là một phân tích bất khả quy của idêan I .

Định nghĩa 3.2. Với giả thiết như trong Định nghĩa 2.1, nếu trong phân tích giao $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_t$, không thể bỏ được bất kì idêan Q_i ($i = \overline{1, t}$) nào, ta nói phân tích bất khả quy của I là phân tích rút gọn.

Trong mục này, luôn giả sử R là vành chính. Khi đó ta có kết quả sau.

Định lý 3.3. (Xem [8, Chương V]) Cho vành chính R và phần tử x . Giả sử x có dạng $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, trong đó $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ là các số tự nhiên và $p_1, \dots, p_k$ là các phần bất khả quy đôi một nguyên tố cùng nhau. Khi đó x có phân tích bất khả quy rút gọn như sau:

$$(x) = (p_1^{\alpha_1}) \cap \dots \cap (p_k^{\alpha_k}).$$

Chứng minh

Do $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, nên $p_i^{\alpha_i} \mid x$ với mọi $1 \leq i \leq k$. Suy ra $(x) \subseteq (p_i^{\alpha_i})$ với mọi $1 \leq i \leq k$ hay $(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^k (p_i^{\alpha_i})$.

Lấy một phần tử h bất kì sao cho $h \in \bigcap_{i=1}^k (p_i^{\alpha_i})$. Khi đó $h \in (p_i^{\alpha_i})$ với mọi $1 \leq i \leq k$. Suy ra $p_i^{\alpha_i} | h$ với mọi $1 \leq i \leq k$. Do các phần tử $p_i^{\alpha_i}$ với $1 \leq i \leq k$ nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} | h$. Suy ra $up_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} | h$, nghĩa là $x | h$. Suy ra $h \in (x)$, từ đó ta nhận được:

$$\bigcap_{i=1}^k (p_i^{\alpha_i}) \subseteq (x).$$

Vậy định lý được chứng minh.

Như vậy, theo Bổ đề 2.7, phân tích trên là phân tích bất khả quy rút gọn của idêan (x) . Ngược lại, nếu biết trước phân tích rút gọn của idêan (x) thì ta có thể xác định được phần tử x . Trước hết ta cần khái niệm sau:

Định nghĩa 3.4. (Xem [9, Chương V]) Hai phần tử x và x' của miền nguyên R được gọi là liên kết với nhau nếu tồn tại phần tử khả nghịch u sao cho $x = ux'$, nghĩa là $x | x'$ và $x' | x$.

Định lý 3.5. Cho vành chính R và idêan (x) có phân tích bất khả quy rút gọn như sau:

$$(x) = (p_1^{\alpha_1}) \cap \dots \cap (p_k^{\alpha_k}),$$

trong đó $p_1, \dots, p_k$ là các phần tử bất khả quy đôi một nguyên tố cùng nhau. Khi đó x liên kết với phần tử $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$.

Chứng minh.

Xét phần tử $y = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, theo Định lý 3.3, ta có $(y) = (p_1^{\alpha_1}) \cap \dots \cap (p_k^{\alpha_k})$.

Suy ra $(x) = (y)$, ta nhận được x liên kết với y , nghĩa là x liên kết với phần tử $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$.

Ta có tập hợp các đa thức trên trường K lập thành một vành, kí hiệu $K[x]$ và $K[x]$ là vành chính (xem [1, 8, 9, 10]) và đa thức bất khả quy của $K[x]$ chính là các phần tử bất khả quy của vành $K[x]$. Trong trường hợp K là trường số ta có:

Định lý 3.6. (Xem [10, Chapter IV])

a) Đa thức bất khả quy của vành đa thức trên trường số thực $\mathbb{R}[x]$ hoặc là đa thức bậc nhất hoặc là đa thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ và với mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ luôn viết được dưới dạng sau:

$$f(x) = a \prod_{i=1}^k (x - r_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^m (x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j},$$

trong đó, a là hệ số bậc cao nhất, r_i ($1 \leq i \leq k$) là các nghiệm thực đôi một khác nhau, $x^2 + b_j x + c_j$ ($1 \leq j \leq m$) là các đa thức bậc hai có $\Delta = b_j^2 - 4c_j < 0$ đôi một nguyên tố cùng nhau và α_i ($1 \leq i \leq k$), β_j ($1 \leq j \leq m$) là các số nguyên dương.

b) Đa thức bất khả quy của vành đa thức trên trường số phức $\mathbb{C}[x]$ là đa thức bậc nhất và với mọi đa thức $z(x) \in \mathbb{C}[x]$ luôn viết được dưới dạng sau:

$$z(x) = a \prod_{i=1}^n (x - r_i)^{\alpha_i},$$

trong đó, a là hệ số bậc cao nhất, r_i ($1 \leq i \leq n$) là các nghiệm phức đôi một khác nhau và α_i ($1 \leq i \leq n$) là các số nguyên dương.

Áp dụng Định lý 3.3 đối với vành đa thức trên trường số thực và trường số phức, kết hợp với Định lý 3.6 ta nhận được kết quả sau:

Định lý 3.7. a) Mọi idêan trong vành đa thức $\mathbb{R}[x]$ luôn có phân tích bất khả quy rút gọn, bao gồm giao của các idêan chính sinh bởi lũy thừa của đa thức bậc nhất hoặc đa thức bậc hai có dạng $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ và các đa thức sinh đôi một nguyên tố cùng nhau.

b) Mọi idêan trong vành đa thức $\mathbb{C}[x]$ luôn có phân tích bất khả quy rút gọn, bao gồm giao của các idêan chính sinh bởi lũy thừa của đa thức bậc nhất và các đa thức sinh đôi một nguyên tố cùng nhau.

Chứng minh

a) Theo Định lý 3.6, mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ có dạng sau

$$f(x) = a \prod_{i=1}^k (x - r_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^m (x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j},$$

trong đó a là hệ số bậc cao nhất, r_i ($1 \leq i \leq k$) là các nghiệm thực đôi một khác nhau, $x^2 + b_j x + c_j$ ($1 \leq j \leq m$) là các đa thức bậc hai có $\Delta = b_j^2 - 4c_j < 0$ đôi một khác nhau và α_i ($1 \leq i \leq k$), β_j ($1 \leq j \leq m$) là các số nguyên dương. Do các đa thức bất khả quy của $\mathbb{R}[x]$ cũng là các phần tử bất khả quy của miền nguyên $\mathbb{R}[x]$, nên các phần tử $x - r_i$ ($1 \leq i \leq k$) và $x^2 + b_j x + c_j$ ($1 \leq j \leq m$) là các đa thức bậc hai có $\Delta = b_j^2 - 4c_j < 0$ là các phần tử bất khả quy đôi một nguyên tố cùng nhau của vành $\mathbb{R}[x]$. Mặt khác theo Bổ đề 2.7, ta có các idêan

$$\left((x - r_i)^{\alpha_i} \right), \left((x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j} \right) \quad (1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m)$$

là các idêan bất khả quy. Theo Định lý 3.3, ta nhận được kết quả cần chứng minh như sau:

$$(f(x)) = \bigcap_{i=1}^k \left((x - r_i)^{\alpha_i} \right) \bigcap_{j=1}^m \left((x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j} \right).$$

b) Theo Định lý 3.6, mọi đa thức $z(x) \in \mathbb{C}[x]$ có dạng sau

$$z(x) = a \prod_{i=1}^n (x - r_i)^{\alpha_i},$$

trong đó a là hệ số bậc cao nhất, r_i ($1 \leq i \leq n$) là các nghiệm phức đôi một khác nhau và α_i ($1 \leq i \leq n$) là các số nguyên dương. Do các đa thức bất khả quy của $\mathbb{C}[x]$ cũng là các phần tử bất khả quy của miền nguyên $\mathbb{C}[x]$, nên các phần tử $x - r_i$ ($1 \leq i \leq n$) là các phần tử bất khả quy đôi một nguyên tố cùng nhau của vành $\mathbb{C}[x]$. Mặt khác theo Bổ đề 2.7, ta có các idêan $\left((x - r_i)^{\alpha_i} \right)$ ($1 \leq i \leq n$) là các idêan bất khả quy.

Theo Định lý 3.3, ta nhận được kết quả cần chứng minh như sau:

$$(z(x)) = \bigcap_{i=1}^n ((x - r_i)^{\alpha_i}).$$

Ta biết rằng, vành đa thức $K[x]$ trên trường K là vành chính, nên với mọi ideal I của $K[x]$ tồn tại đa thức $f(x) \in K[x]$ sao cho $I = (f(x))$. Do đó, nếu biết trước phân tích bất khả quy rút gọn của I , ta có thể xác định được đa thức $f(x)$.

Định lý 3.8. a) Trong vành đa thức $\mathbb{R}[x]$, mọi ideal I có phân tích bất khả quy rút gọn như sau:

$$I = \bigcap_{i=1}^k ((x - r_i)^{\alpha_i}) \bigcap_{j=1}^m ((x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j}),$$

trong đó r_i ($1 \leq i \leq k$) là các số thực đôi một khác nhau, $x^2 + b_j x + c_j$ ($1 \leq j \leq m$) là các đa thức bậc hai có $\Delta = b_j^2 - 4c_j < 0$ đôi một nguyên tố cùng nhau và α_i ($1 \leq i \leq k$), β_j ($1 \leq j \leq m$) là các số nguyên dương. Giả sử I có đa thức sinh là $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Khi đó

$$f(x) = a \prod_{i=1}^k (x - r_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^m (x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j},$$

trong đó a là số thực bất kỳ khác không.

b) Trong vành đa thức $\mathbb{C}[x]$, mọi ideal J có phân tích bất khả quy rút gọn như sau:

$J = \bigcap_{i=1}^n ((x - r_i)^{\alpha_i})$, trong đó r_i ($1 \leq i \leq n$) là các số phức đôi một khác nhau và α_i ($1 \leq i \leq n$) là các số nguyên dương. Giả sử J có đa thức sinh là $z(x) \in \mathbb{C}[x]$. Khi đó $z(x) = a \prod_{i=1}^n (x - r_i)^{\alpha_i}$, trong đó, a là số phức bất kỳ khác không.

Chứng minh

a) Ta có: $(f(x)) = \bigcap_{i=1}^k ((x - r_i)^{\alpha_i}) \bigcap_{j=1}^m ((x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j})$.

Theo Định lý 3.5, ta có $f(x)$ và $\prod_{i=1}^k (x - r_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^m (x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j}$ là hai phần tử liên

kết, nghĩa là tồn tại phần tử khác không, khả nghịch $a \in \mathbb{R}[x]$ sao cho

$$f(x) = a \prod_{i=1}^k (x - r_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^m (x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j}.$$

Vì $0 \neq a \in \mathbb{R}[x]$ khả nghịch nên a là các số thực khác không.

b) Lập luận tương tự trên ta nhận được điều phải chứng minh.

Ví dụ 3.9. a) Trong vành đa thức $\mathbb{R}[x]$, cho đa thức

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24.$$

Ta có: $f(x) = [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] - 24 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 24.$

Đặt $t = x^2 + 5x + 4$, khi đó $f(x)$ trở thành

$$g(t) = t(t+2) - 24 = t^2 + 2t - 24 = t^2 + 2t + 1 - 25 = (t+1)^2 - 5^2 = (t-4)(t+6).$$

Suy ra $f(x) = (x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 10) = x(x+5)(x^2 + 5x + 10)$. Đa thức $x^2 + 5x + 10$ có $\Delta = 25 - 40 < 0$, nên $x^2 + 5x + 10$ là đa thức bất khả quy trên $\mathbb{R}[x]$. Theo Định lý 3.7 a), ta nhận được $(f(x)) = (x) \cap (x+5) \cap (x^2 + 5x + 10)$, là phân tích bất khả quy rút gọn của $(f(x))$

b) Trong vành đa thức $\mathbb{C}[x]$, cho đa thức $z(x) = x^4 + 5x^2 + 6$. Ta có

$$\begin{aligned} x^4 + 5x^2 + 6 &= x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 6 = x^2(x^2 + 3) + 2(x^2 + 3) \\ &= (x^2 + 2)(x^2 + 3) = (x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)(x + \sqrt{3}i)(x - \sqrt{3}i). \end{aligned}$$

Do đó $(z(x)) = (x - \sqrt{2}i) \cap (x + \sqrt{2}i) \cap (x + \sqrt{3}i) \cap (x - \sqrt{3}i)$ là phân tích bất khả quy rút gọn của ideal $(z(x))$.

Ví dụ 3.10. a) Trong vành đa thức $\mathbb{R}[x]$, cho ideal I có phân tích bất khả quy rút gọn như sau:

$$I = ((x-1)^2) \cap ((x^2 + 4x + 15)^2) \cap ((x^2 - 3x + 7)^2).$$

Giả sử $I = (f(x))$, theo Định lý 3.8 a), ta xác định được

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-1)^2(x^2 + 4x + 15)^2(x^2 - 3x + 7)^2 \\ &= a(x^{10} + 8x^9 + 46x^8 + 118x^7 + 209x^6 - 92x^5 - 239x^4 - 441x^3 + 46x^2 + 120x + 225), \end{aligned}$$

trong đó, $a \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$.

b) Trong vành đa thức $\mathbb{C}[x]$, cho ideal J có phân tích bất khả quy rút gọn như sau:

$$J = (((i+1)x - 2)^2) \cap (ix + 3 - i).$$

Giả sử $J = (z(x))$, theo Định lý 3.8 b), ta xác định được

$$\begin{aligned} z(x) &= c((i+1)x - 2)^2 \cdot (ix + 3 - i) \\ &= c(-2x^3 + (6 + 2i)x^2 - (16 + 4i)x + 12 - 4i), \end{aligned}$$

trong đó, $c \in \mathbb{C}$ và $c \neq 0$.

4. KẾT LUẬN

Mọi ideal của vành chính luôn có phân tích bất khả quy rút gọn. Trong vành đa thức hệ số thực, các ideal phân tích được thành giao của các ideal chính sinh bởi đa thức bậc một hoặc đa thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có $\Delta = b^2 - 4ac < 0$; trong vành đa thức hệ số phức, các ideal phân tích được thành giao của các ideal chính sinh bởi đa thức bậc một.

Ngược lại, mọi ideal trong vành đa thức (hệ số thực, hệ số phức) nếu biết phân tích bất khả quy thì ta xác định được đa thức sinh của ideal đó.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald (1969), *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Press.
- [2] R.Y. Sharp (1998), *Steps in commutative algebra*, Cambridge University Press.
- [3] J. Herzog, T. Hibi (2011), *Monomial ideals*, Springer Press.
- [4] A. Galligo, D. Rupprecht (2002), *Irreducible Decomposition of Curves*, 33(5) 661-677.
- [5] K. Thomas, M. Ezra and O. Christopher (2016), *Irreducible decomposition of binomial ideals*, *Compositio Mathematica*, 152(6) 1319-1332.
- [6] B. Valentina (2010), *Decompositions of ideals into irreducible ideals in numerical semigroups*, *Journal of Commutative Algebra*, 2(3) 281-294.
- [7] H. William, L. J. Ratliff and S. Kishor (1997), *On the irreducible components of an ideal*, *Communications in Algebra*, 25(5) 1609-1634.
- [8] M. Reid (1995), *Undergraduate Commutative Algebra*, Cambridge University Press.
- [9] Hoàng Xuân Sính (2013) (tái bản lần thứ 14), *Đại số Đại Cương*, Nxb. Giáo dục Việt Nam, Hà Nội.
- [10] S. Lang (2002), *Algebra*, Springer Press.

IRREDUCIBLE DECOMPOSITION OF IDEALS IN A PRINCIPAL IDEAL DOMAIN

Le Xuan Dung, Nguyen Thi Hai Yen

ABSTRACT

The paper gives a detailed proof of the irreducible decomposition formula for ideals in a principal ideal domain, thereby establishing the relationship between the factorization of polynomials into products of irreducible polynomials and the decomposition of ideals into intersections of irreducible ideals in the rings of real or complex coefficient polynomials.

Keywords: *Principal ideal domain, principal ideal, irreducible ideal, irreducible decomposition.*

* Ngày nộp bài: 10/6/2025; Ngày gửi phản biện: 11/6/2025; Ngày duyệt đăng: 25/9/2025