

SỰ TỒN TẠI VÀ TÍNH DUY NHẤT NGHIỆM LERAY-HOPF VÀ NGHIỆM LERAY-HOPF KHÔNG ÂM CỦA MÔ HÌNH BÀI TOÁN RỜI RẠC XẤP XỈ PHƯƠNG TRÌNH NAVIER-STOKES BẬC PHÂN THỨ

Lê Trần Tình¹, Phạm Thị Vân², Lê Châu Giang³, Lưu Cẩm Anh³,
Phạm Thị Quý³, Lê Trịnh Như Quỳnh³

TÓM TẮT

Nội dung của bài báo trình bày sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm Leray-Hopf và nghiệm không âm Leray-Hopf của mô hình bài toán rời rạc xấp xỉ phương trình Navier-Stokes bậc phân thứ trong không gian ba chiều. Các kết quả đạt được là sự mở rộng và phát triển các kết quả đã có đối với vấn đề được nghiên cứu.

Từ khoá: Phương trình Navier-Stokes bậc phân thứ, nghiệm Leray-Hopf, nghiệm Leray-Hopf không âm.

DOI: <https://doi.org/10.70117/hdujs.79.09.2025.958>

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Phương trình Navier-Stokes bậc phân thứ trong xuyên ba chiều $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]^3$ dạng

$$\begin{cases} \partial_t u + \nu(-\Delta)^\alpha u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

trong đó $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ là vectơ vận tốc của chất lỏng; $p = p(x, t)$ là áp lực; $\nu > 0$ là hệ số nhớt; $f(x, t)$ là ngoại lực và $(-\Delta)^\alpha$ là toán tử Laplace bậc phân thứ. Phương trình Navier-Stokes bậc phân thứ được nghiên cứu đầu tiên bởi J.-L. Lions đối với sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu khi $\alpha \in [\frac{5}{4}, \infty)$. Vấn đề này cũng được xem xét lại trong [1]. Đặc biệt, tính không duy nhất nghiệm yếu khi $\alpha < \frac{5}{4}$ đã được chứng minh bởi T. Luo và E. S. Titi trong [2]. Gần đây, sự tồn tại, tính duy nhất nghiệm và đáng điều kiện cận nghiệm của hệ (1.1) với số hạng tắt dần cũng đã được nghiên cứu chi tiết trong [3]. Trên đây là tóm tắt một số kết quả điển hình trong số rất nhiều các kết quả liên quan đến hệ (1.1) của nhiều nhà nghiên cứu trên thế giới. Tuy nhiên, rất nhiều vấn đề mở vẫn còn tồn tại và cần được nghiên cứu sâu đối với hệ (1.1) (xem [2, 3] và các tài liệu tham khảo ở trong các tài liệu này).

¹ Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức; Email: letrantinh@hdu.edu.vn

² Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Sĩ quan Đặc công

³ Sinh viên K25 Đại học Sư phạm Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

Một hướng tiếp cận được nhiều nhà nghiên cứu sử dụng khi nghiên cứu về phương trình Navier-Stokes và các hệ liên quan là nghiên cứu các mô hình bài toán rời rạc tương ứng. Nhiều mô hình bài toán rời rạc được đề xuất và nghiên cứu theo cách tiếp cận phù hợp. Gần đây, M. Dai và các cộng sự [4] đã sử dụng công cụ phân rã Littlewood-Paley [5] để xây dựng các mô hình bài toán rời rạc cho nhiều hệ phương trình trong cơ học chất lỏng. Kết quả nhận được rất khả quan vì mô hình bài toán rời rạc nhận được vẫn giữ được các tính chất quan trọng của nghiệm như bài toán ban đầu và các mô hình bài toán này đóng vai trò như là các mô hình tổng quát chứa đựng các mô hình nghiên cứu trước đó [4]. Mô hình bài toán rời rạc xấp xỉ (1.1), được xây dựng nhờ sử dụng công cụ phân rã Littlewood-Paley, đã được trình bày trong [6] có dạng:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a_0 + \nu a_0 + \beta a_0 a_1 + \eta \lambda_1^\theta a_1^2 = b_0, \\ \frac{d}{dt} a_j + \nu \lambda_j^{2\alpha} a_j + \beta (\lambda_j^\theta a_j a_{j+1} - \lambda_{j-1}^\theta a_{j-1}^2) + \eta (\lambda_{j+1}^\theta a_{j+1}^2 - \lambda_j^\theta a_j a_{j-1}) = b_j, \end{cases} \quad (1.2)$$

với $j=1,2,3,\dots$. Trong đó, $\nu > 0$, $\alpha > 0$, $\lambda_j = 2^j$, $\theta \in [1, \frac{5}{2}]$, $b_j(t)$ là các hàm

cho trước. Kết quả về sự tồn tại nghiệm cũng đã được đưa ra trong [6] nhưng thiếu chứng minh chi tiết. Mô hình (1.2) có thể được xem là mô hình tổng quát vì các mô hình trước đó có thể nhận được như là một trường hợp riêng.

Trong bài báo này, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu mô hình bài toán rời rạc (1.2). Cụ thể, chúng tôi chứng minh một số kết quả mới về sự tồn tại và duy nhất nghiệm Leray-Hopf của hệ (1.2), tính không âm của nghiệm Leray-Hopf. Cấu trúc bài báo như sau: Phần 1: Đặt vấn đề; Phần 2: Kiến thức chuẩn bị; Phần 3: Sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm Leray-Hopf và nghiệm Leray-Hopf không âm. Nội dung phần này trình bày chứng minh về sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm Leray-Hopf và nghiệm Leray-Hopf không âm của mô hình bài toán rời rạc (1.2). Cuối cùng là danh sách các tài liệu tham khảo được sử dụng. Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng ký hiệu $C_i, i=0,1,2,\dots$, là các hằng số với giá trị thay đổi phù hợp với các biến đổi tương ứng.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của mô hình bài toán (1.2), đầu tiên chúng ta cần định nghĩa không gian trạng thái phù hợp. Đặt $S^0 := \ell^2$ không gian các dãy số được trang bị tích vô hướng và chuẩn như sau: Giả sử $u := \{u_n\}_{n=0}^\infty$ và $v := \{v_n\}_{n=0}^\infty$ là các phần tử của S^0 :

$$(u, v)_{S^0} := \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n, \quad \|u\|_{S^0} := \sqrt{(u, u)_{S^0}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Không gian S^s , $s \in \mathbb{R}$, là không gian các dãy số được trang bị tích vô hướng và chuẩn như sau:

$$(u, v)_{S^s} := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{2s} u_n v_n, \quad \|u\|_{S^s} := \sqrt{(u, u)_{S^s}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{2s} u_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Tiếp theo, chúng ta có một số khái niệm về nghiệm của bài toán (1.2) như sau (xem [7][8]).

Định nghĩa 2.1. Một nghiệm yếu trên $[T, \infty)$ (hoặc $(-\infty, \infty)$ nếu $T = -\infty$) của (1.2) là một hàm $a(t)$ xác định trên $[T, \infty)$ và nhận giá trị trong S^0 thoả mãn $a_n(t) \in C^1([T, \infty))$ và các $a_n(t)$ thoả mãn các phương trình của (1.2).

Định nghĩa 2.2.

a) Nghiệm yếu $a(t)$ của (1.2) được gọi là nghiệm mạnh trên $[T_1, T_2] \subset [T, \infty)$ nếu $\|a\|_{S^\alpha}$ bị chặn trên $[T_1, T_2]$.

b) Nghiệm yếu $a(t)$ của (1.2) được gọi là nghiệm mạnh trên $[T, \infty)$ nếu $\|a\|_{S^\alpha}$ bị chặn trên mọi đoạn $[T_1, T_2] \subset [T, \infty)$.

Định nghĩa 2.3. Một nghiệm Leray-Hopf $a(t)$ trên $[T, \infty)$ của (1.2) là một nghiệm yếu $a(t)$ trên $[T, \infty)$ của (1.2) thoả mãn bất đẳng thức năng lượng

$$\|a(t)\|_{S^0}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|a(s)\|_{S^\alpha}^2 ds \leq \|a(t_0)\|_{S^0}^2 + 2 \int_{t_0}^t (b(s), a(s))_{S^0} ds$$

với mọi $T \leq t_0 \leq t$ và hầu khắp nơi $t_0 \in [T, \infty)$.

Nghiệm Leray-Hopf $a(t)$ trên $[T, \infty)$ được gọi là không âm nếu $a_n(t) \geq 0$ với mọi n và $t \in [T, \infty)$.

3. SỰ TỒN TẠI VÀ TÍNH DUY NHẤT NGHIỆM LERAY-HOPF VÀ NGHIỆM LERAY-HOPF KHÔNG ÂM

Sự tồn tại nghiệm Leray-Hopf của (1.2) là nội dung của định lý sau.

Định lý 3.1. Giả sử ν, α là các số thực dương và $a^0 \in S^0$. Với mọi $t \geq 0$, giả sử rằng

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{-2\alpha} \int_0^t b_j^2(\tau) d\tau < \infty. \quad (3.1)$$

Khi đó, bài toán (1.2) có nghiệm Leray-Hopf $a(t)$ trên $[0, \infty)$ thoả mãn $a(0) = a^0$ và Định nghĩa 2.3.

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh sự tồn tại nghiệm Leray-Hopf của (1.2) bằng phương pháp xấp xỉ Galerkin. Với bất kỳ số tự nhiên k , chúng ta ký hiệu dãy $a^k(t) = (a_0^k(t), a_1^k(t), \dots, a_k^k(t), 0, 0, \dots)$, với $a_j^k(0) = a_j^0$, $j = 0, 1, 2, \dots, k$, và $a^k(t)$ thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a_0^k + \nu a_0^k + \beta a_0^k a_1^k + \eta \lambda_1^\theta (a_1^k)^2 = b_0, \\ \frac{d}{dt} a_j^k + \nu \lambda_j^{2\alpha} a_j^k + \beta (\lambda_j^\theta a_j^k a_{j+1}^k - \lambda_{j-1}^\theta (a_{j-1}^k)^2) + \eta (\lambda_{j+1}^\theta (a_{j+1}^k)^2 - \lambda_j^\theta a_j^k a_{j-1}^k) = b_j, j \leq k-1, \\ \frac{d}{dt} a_k^k + \nu \lambda_k^{2\alpha} a_k^k - \beta \lambda_{k-1}^\theta (a_{k-1}^k)^2 - \eta \lambda_k^\theta a_k^k a_{k-1}^k = b_k. \end{cases} \quad (3.2)$$

Lấy tích vô hướng (3.2) với a^k , chúng ta nhận được:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|a^k\|_{S^0}^2 + \nu \|a^k\|_{S^\alpha}^2 = \sum_{j=0}^k b_j a_j^k. \quad (3.3)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho vế phải của (3.3), ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|a^k\|_{S^0}^2 + \nu \|a^k\|_{S^\alpha}^2 &\leq \left(\sum_{j=0}^k \lambda_j^{-2\alpha} b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^k \lambda_j^{2\alpha} (a_j^k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2\nu} \sum_{j=0}^k \lambda_j^{-2\alpha} b_j^2 + \frac{\nu}{2} \|a^k\|_{S^\alpha}^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Do đó,

$$\frac{d}{dt} \|a^k\|_{S^0}^2 + \nu \|a^k\|_{S^\alpha}^2 \leq \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^k \lambda_j^{-2\alpha} b_j^2. \quad (3.5)$$

Theo định nghĩa chuẩn trên không gian S^0 và S^α , ta có

$$\frac{d}{dt} \|a^k\|_{S^0}^2 + \nu \|a^k\|_{S^0}^2 \leq \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^k \lambda_j^{-2\alpha} b_j^2. \quad (3.6)$$

Sử dụng bất đẳng thức Gronwall, ta suy ra từ (3.6) rằng

$$\begin{aligned} \|a^k(t)\|_{S^0}^2 &\leq e^{-\nu t} \|a^k(0)\|_{S^0}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t e^{-\nu(t-s)} \sum_{j=0}^k \lambda_j^{-2\alpha} b_j^2(s) ds \\ &\leq e^{-\nu t} \|a^k(0)\|_{S^0}^2 + \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^k \int_0^t \lambda_j^{-2\alpha} b_j^2(s) ds. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Từ (3.1) và (3.7), ta suy ra $a^k(t)$ bị chặn trên $[0, \infty)$. Theo lý thuyết phương trình vi phân thường, hệ (3.2) tồn tại duy nhất nghiệm $a^k(t)$ trên $[0, \infty)$.

Mặt khác, từ (3.1) và (3.7), chúng ta suy ra sự tồn tại M thỏa mãn:

$$|a_j^k(t)| \leq M \quad \text{với mọi } j, k, t \geq 0. \quad (3.8)$$

Khi đó, sử dụng (3.1) và (3.8) sẽ thu được:

$$\begin{aligned} |a_0^k(t) - a_0^k(s)| &\leq \left| \int_s^t (-\nu a_0^k - \beta a_0^k a_1^k - \eta \lambda_1^\theta (a_1^k)^2 + b_0) d\tau \right| \\ &\leq \int_s^t (\nu |a_0^k| + \beta |a_0^k| |a_1^k| + \eta \lambda_1^\theta |a_1^k|^2) d\tau + \left(\int_s^t \lambda_0^{-2\alpha} b_0^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t \lambda_0^{2\alpha} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\nu M + \beta M^2 + \eta \lambda_1^\theta M^2) |t-s| + C |t-s|^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

với $j = 1, 2, \dots, k-1$,

$$\begin{aligned} |a_j^k(t) - a_j^k(s)| &\leq \left| \int_s^t (-\nu \lambda_j^{2\alpha} a_j^k - \beta (\lambda_j^\theta a_j^k a_{j+1}^k - \lambda_{j-1}^\theta (a_{j-1}^k)^2) \right. \\ &\quad \left. - \eta (\lambda_{j+1}^\theta (a_{j+1}^k)^2 - \lambda_j^\theta a_j^k a_{j-1}^k + b_j) d\tau \right| \\ &\leq \int_s^t (\nu \lambda_j^{2\alpha} |a_j^k| + \beta (\lambda_j^\theta |a_j^k| |a_{j+1}^k| + \lambda_{j-1}^\theta |a_{j-1}^k|^2) \\ &\quad + \eta (\lambda_{j+1}^\theta |a_{j+1}^k|^2 + \lambda_j^\theta |a_j^k| |a_{j-1}^k|)) d\tau + \left(\int_s^t \lambda_j^{-2\alpha} b_j^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t \lambda_j^{2\alpha} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq (\nu\lambda_j^{2\alpha}M + \beta(\lambda_j^\theta + \lambda_{j-1}^\theta)M^2 + \eta(\lambda_{j+1}^\theta + \lambda_j^\theta)M^2)|t-s| + C\lambda_j^\alpha|t-s|^{\frac{1}{2}}. \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} |a_k^k(t) - a_k^k(s)| &\leq \left| \int_s^t (-\nu\lambda_j^{2\alpha}a_k^k + \beta\lambda_{k-1}^\theta(a_{k-1}^k)^2 + \eta\lambda_k^\theta a_k^k a_{k-1}^k + b_k) d\tau \right| \\ &\leq \int_s^t (\nu\lambda_j^{2\alpha}|a_k^k| + \beta\lambda_{k-1}^\theta|a_{k-1}^k|^2 + \eta\lambda_k^\theta|a_k^k||a_{k-1}^k|) d\tau + \left(\int_s^t \lambda_k^{-2\alpha}b_k^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t \lambda_k^{2\alpha} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\nu\lambda_j^{2\alpha}M + \beta\lambda_{k-1}^\theta M^2 + \eta\lambda_k^\theta M^2)|t-s| + C\lambda_k^\alpha|t-s|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sử dụng (3.9), (3.10) và (3.11), ta có

$$d_w(a^k(t), a^k(s)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(n^2)}} \frac{|a_n^k(t) - a_n^k(s)|}{1 + |a_n^k(t) - a_n^k(s)|} \leq C|t-s|^{\frac{1}{2}}. \quad (3.12)$$

Điều này cho phép chúng ta kết luận rằng dãy $\{a^k\}$ là một dãy hàm liên tục đồng bậc trong $C([0, \infty); S_w^0)$ với điều kiện ban đầu bị chặn (chỉ số dưới w có nghĩa liên tục yếu). Do đó, theo định lý Ascoli-Arzelà, chúng ta suy ra rằng $\{a^k\}$ là compact tương đối trong $C([0, T]; S_w^0)$ với mọi $T \geq 0$. Sử dụng quá trình chéo hoá, chúng ta có $\{a^k\}$ là compact tương đối trong $C([0, \infty); S_w^0)$. Chuyển qua giới hạn, chúng ta nhận được sự tồn tại hàm liên tục yếu $a(t)$ nhận giá trị trong S^0 thoả mãn

$$a^{k_n} \rightarrow a \text{ khi } k_n \rightarrow \infty \text{ trong } C([0, \infty); S_w^0). \quad (3.13)$$

Đặc biệt, $a_j^{k_n}(t) \rightarrow a_j(t)$ khi $k_n \rightarrow \infty$, với mọi $j, t \geq 0$. Do đó, $a(0) = a^0$. Hơn nữa,

$$a_0^{k_n}(t) = a_0^{k_n}(0) + \int_0^t (-\nu a_0^{k_n} - \beta a_0^{k_n} a_1^{k_n} - \eta \lambda_1^\theta (a_1^{k_n})^2 + b_0) d\tau,$$

và

$$\begin{aligned} a_j^{k_n}(t) &= a_j^{k_n}(0) + \int_0^t (-\nu\lambda_j^{2\alpha}a_j^{k_n} - \beta(\lambda_j^\theta a_j^{k_n} a_{j+1}^{k_n} - \lambda_{j-1}^\theta (a_{j-1}^{k_n})^2) \\ &\quad - \eta(\lambda_{j+1}^\theta (a_{j+1}^{k_n})^2 - \lambda_j^\theta a_j^{k_n} a_{j-1}^{k_n}) + b_j) d\tau \end{aligned}$$

với $1 \leq j \leq k_n - 1$. Lấy giới hạn khi $k_n \rightarrow \infty$, ta thu được

$$a_0(t) = a_0(0) + \int_0^t (-\nu a_0 - \beta a_0 a_1 - \eta \lambda_1^\theta a_1^2 + b_0) d\tau,$$

và

$$\begin{aligned} a_j(t) &= a_j(0) + \int_0^t (-\nu\lambda_j^{2\alpha}a_j - \beta(\lambda_j^\theta a_j a_{j+1} - \lambda_{j-1}^\theta (a_{j-1})^2) \\ &\quad - \eta(\lambda_{j+1}^\theta (a_{j+1})^2 - \lambda_j^\theta a_j a_{j-1}) + b_j) d\tau. \end{aligned}$$

Vì $a_j(t)$ liên tục nên $a_j \in C^1([0, \infty))$ và thoả mãn (1.2).

Cuối cùng, chúng ta cần chứng minh $a(t)$ thoả mãn bất đẳng thức năng lượng trong Định nghĩa 2.3. Theo (3.3), $a^{k_n}(t)$ thoả mãn đẳng thức năng lượng

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|a^{k_n}\|_{S^0}^2 + \nu \|a^{k_n}\|_{S^\alpha}^2 = (b, a^{k_n})_{S^0}. \quad (3.14)$$

Lấy tích phân (3.14) trên $[t_0, t]$ ta được:

$$\|a^{k_n}(t)\|_{S^0}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|a^{k_n}(\tau)\|_{S^\alpha}^2 d\tau = \|a^{k_n}(t_0)\|_{S^0}^2 + 2 \int_{t_0}^t (b(\tau), a^{k_n}(\tau))_{S^0} d\tau, \quad (3.15)$$

với mọi $t \geq t_0 \geq 0$. Khi đó, dãy $\{a^{k_n}\}$ bị chặn trên $L^2([t_0, t]; S^\alpha)$ với mọi $t \geq t_0 \geq 0$.

Kết hợp với (3.13), ta có $\|a^{k_n}(s) - a(s)\|_{S^0} \rightarrow 0$ khi $k_n \rightarrow \infty$. Đặc biệt, $\|a^{k_n}(t)\|_{S^0} \rightarrow \|a(t)\|_{S^0}$ khi $k_n \rightarrow \infty$, hầu khắp nơi trong $[0, \infty)$. Lấy $t_0 \geq 0$ bất kỳ mà $\|a^{k_n}(t_0)\|_{S^0} \rightarrow \|a(t_0)\|_{S^0}$ khi $k_n \rightarrow \infty$. Với mọi số nguyên dương N , ta có:

$$\|a^{k_n}(t)\|_{S^0}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \sum_{j=0}^N \lambda_j^{2\alpha} (a_j^{k_n}(\tau))^2 d\tau \leq \|a^{k_n}(t_0)\|_{S^0}^2 + 2 \int_{t_0}^t (b(\tau), a^{k_n}(\tau))_{S^0} d\tau.$$

Sử dụng (3.13) và cho $k_n \rightarrow \infty$, ta có:

$$\|a(t)\|_{S^0}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \sum_{j=0}^N \lambda_j^{2\alpha} (a_j(\tau))^2 d\tau \leq \|a(t_0)\|_{S^0}^2 + 2 \int_{t_0}^t (b(\tau), a(\tau))_{S^0} d\tau.$$

Cho $N \rightarrow \infty$ và sử dụng định lý Levi, ta có:

$$\|a(t)\|_{S^0}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|a(\tau)\|_{S^\alpha}^2 d\tau \leq \|a(t_0)\|_{S^0}^2 + 2 \int_{t_0}^t (b(\tau), a(\tau))_{S^0} d\tau,$$

với mọi $0 \leq t_0 \leq t$ và hầu khắp nơi t_0 trong $[0, \infty)$.

Nhận xét 3.2

i) Chứng minh sự tồn tại nghiệm Leray-Hopf $a(t)$ của (1.2) trong Định lý 3.1 vẫn còn đúng cho bất kỳ miền $[T, \infty)$.

ii) Nếu $\alpha = 1$ và b không phụ thuộc vào thời gian, thì chúng ta nhận được kết quả của chứng minh Định lý 4.1 trong [9] đối với mô hình bài toán rời rạc của phương trình Navier-Stokes.

Tính duy nhất nghiệm Leray-Hopf của (1.2) là nội dung của định lý sau.

Định lý 3.3. Cho trước ν , α là các số thực dương và với mọi $t \geq 0$,

$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{-2\alpha} \int_0^t b_j^2(\tau) d\tau < \infty$. Giả sử $a(t)$ và $u(t)$ là hai nghiệm Leray-Hopf của (1.2) với cùng

điều kiện ban đầu $a^0 \in S^0$. Giả sử tồn tại số J thỏa mãn

$$|a_j(t)| \leq C_0 \lambda_j^{2\alpha-\theta}, \quad \forall j \geq J, \text{ và } t \in [0, \infty), \quad (3.16)$$

trong đó C_0 là hằng số thỏa mãn

$$C_0(|\beta| \lambda^{2\alpha-\theta} + |\beta| \lambda^{-\alpha} + |\eta| \lambda^\alpha + |\eta| \lambda^{\theta-2\alpha}) \leq \nu. \quad (3.17)$$

Khi đó, $a_j \equiv u_j$, $\forall j \geq 0$, trên $[0, \infty)$.

Chứng minh. Vì $a(t)$ và $u(t)$ là hai nghiệm Leray-Hopf của (1.2) với cùng điều kiện ban đầu $a^0 \in S^0$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (a_j - u_j)^2 &= \frac{d}{dt} (a_j^2 - 2a_j u_j + u_j^2) \\ &= 2[(a_j \frac{d}{dt} a_j + u_j \frac{d}{dt} u_j) - (a_j \frac{d}{dt} u_j + u_j \frac{d}{dt} a_j)]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Từ (1.2), ta suy ra

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a_0 + \nu a_0 + \beta a_0 a_1 + \eta \lambda_1^\theta a_1^2 &= b_0, & a_0 \frac{d}{dt}a_0 + \nu a_0^2 + \beta a_0^2 a_1 + \eta \lambda_1^\theta a_0 a_1^2 &= a_0 b_0, \\ u_0 \frac{d}{dt}a_0 + \nu a_0 u_0 + \beta a_0 a_1 u_0 + \eta \lambda_1^\theta a_1^2 u_0 &= u_0 b_0, & \frac{d}{dt}u_0 + \nu u_0 + \beta u_0 u_1 + \eta \lambda_1^\theta u_1^2 &= b_0, \\ u_0 \frac{d}{dt}u_0 + \nu u_0^2 + \beta u_0^2 u_1 + \eta \lambda_1^\theta u_0 u_1^2 &= u_0 b_0, & a_0 \frac{d}{dt}u_0 + \nu a_0 u_0 + \beta a_0 u_0 u_1 + \eta \lambda_1^\theta a_0 u_1^2 &= a_0 b_0, \\ \frac{d}{dt}a_j + \nu \lambda_j^{2\alpha} a_j + \beta(\lambda_j^\theta a_j a_{j+1} - \lambda_{j-1}^\theta a_{j-1}^2) + \eta(\lambda_{j+1}^\theta a_{j+1}^2 - \lambda_j^\theta a_j a_{j-1}) &= b_j, \\ a_j \frac{d}{dt}a_j + \nu \lambda_j^{2\alpha} a_j^2 + \beta(\lambda_j^\theta a_j^2 a_{j+1} - \lambda_{j-1}^\theta a_{j-1}^2 a_j) + \eta(\lambda_{j+1}^\theta a_{j+1}^2 a_j - \lambda_j^\theta a_j^2 a_{j-1}) &= a_j b_j, \\ u_j \frac{d}{dt}a_j + \nu \lambda_j^{2\alpha} a_j u_j + \beta(\lambda_j^\theta a_j a_{j+1} u_j - \lambda_{j-1}^\theta a_{j-1}^2 u_j) + \eta(\lambda_{j+1}^\theta a_{j+1}^2 u_j - \lambda_j^\theta a_j a_{j-1} u_j) &= u_j b_j, \\ \frac{d}{dt}u_j + \nu \lambda_j^{2\alpha} u_j + \beta(\lambda_j^\theta u_j u_{j+1} - \lambda_{j-1}^\theta u_{j-1}^2) + \eta(\lambda_{j+1}^\theta u_{j+1}^2 - \lambda_j^\theta u_j u_{j-1}) &= b_j, \\ u_j \frac{d}{dt}u_j + \nu \lambda_j^{2\alpha} u_j^2 + \beta(\lambda_j^\theta u_j^2 u_{j+1} - \lambda_{j-1}^\theta u_{j-1}^2 u_j) + \eta(\lambda_{j+1}^\theta u_{j+1}^2 u_j - \lambda_j^\theta u_j^2 u_{j-1}) &= u_j b_j, \\ a_j \frac{d}{dt}u_j + \nu \lambda_j^{2\alpha} a_j u_j + \beta(\lambda_j^\theta a_j u_j u_{j+1} - \lambda_{j-1}^\theta a_j u_{j-1}^2) + \eta(\lambda_{j+1}^\theta a_j u_{j+1}^2 - \lambda_j^\theta a_j u_j u_{j-1}) &= a_j b_j, \end{aligned}$$

với $j=1, 2, 3, \dots$.

Chúng ta nhóm các số hạng một cách phù hợp sẽ được

$$a_0 \frac{d}{dt}a_0 + u_0 \frac{d}{dt}u_0 = -\nu(a_0^2 + u_0^2) - \beta(a_0^2 a_1 + u_0^2 u_1) - \eta \lambda_1^\theta (a_0 a_1^2 + u_0 u_1^2) + a_0 b_0 + u_0 b_0,$$

và

$$u_0 \frac{d}{dt}a_0 + a_0 \frac{d}{dt}u_0 = -2\nu a_0 u_0 - \beta(a_0 a_1 u_0 + a_0 u_0 u_1) - \eta \lambda_1^\theta (a_1^2 u_0 + a_0 u_1^2) + a_0 b_0 + u_0 b_0.$$

Suy ra,

$$\begin{aligned} (a_0 \frac{d}{dt}a_0 + u_0 \frac{d}{dt}u_0) - (u_0 \frac{d}{dt}a_0 + a_0 \frac{d}{dt}u_0) &= -\nu(a_0 - u_0)^2 - \beta(a_0^2 a_1 + u_0^2 u_1 - a_0 a_1 u_0 - a_0 u_0 u_1) \\ &\quad - \eta \lambda_1^\theta (a_0 a_1^2 + u_0 u_1^2 - a_1^2 u_0 - a_0 u_1^2). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ta có

$$\begin{aligned} a_j \frac{d}{dt}a_j + u_j \frac{d}{dt}u_j &= -\nu \lambda_j^{2\alpha} (a_j^2 + u_j^2) - \beta(\lambda_j^\theta a_j^2 a_{j+1} - \lambda_{j-1}^\theta a_{j-1}^2 a_j + \lambda_j^\theta u_j^2 u_{j+1} - \lambda_{j-1}^\theta u_{j-1}^2 u_j) \\ &\quad - \eta(\lambda_{j+1}^\theta a_{j+1}^2 a_j - \lambda_j^\theta a_j^2 a_{j-1} + \lambda_{j+1}^\theta u_{j+1}^2 u_j - \lambda_j^\theta u_j^2 u_{j-1}) + a_j b_j + u_j b_j, \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} u_j \frac{d}{dt}a_j + a_j \frac{d}{dt}u_j &= -2\nu \lambda_j^{2\alpha} a_j u_j - \beta(\lambda_j^\theta a_j a_{j+1} u_j - \lambda_{j-1}^\theta a_{j-1}^2 u_j + \lambda_j^\theta a_j u_j u_{j+1} - \lambda_{j-1}^\theta a_j u_{j-1}^2) \\ &\quad - \eta(\lambda_{j+1}^\theta a_{j+1}^2 u_j - \lambda_j^\theta a_j a_{j-1} u_j + \lambda_{j+1}^\theta a_j u_{j+1}^2 - \lambda_j^\theta a_j u_j u_{j-1}) + a_j b_j + u_j b_j. \end{aligned}$$

Suy ra,

$$\begin{aligned}
 & (a_j \frac{d}{dt} a_j + u_j \frac{d}{dt} u_j) - (u_j \frac{d}{dt} a_j + a_j \frac{d}{dt} u_j) = -\nu \lambda_j^{2\alpha} (a_j - u_j)^2 \\
 & -\beta(\lambda_j^\theta a_j^2 a_{j+1} - \lambda_{j-1}^\theta a_{j-1}^2 a_j + \lambda_j^\theta u_j^2 u_{j+1} - \lambda_{j-1}^\theta u_{j-1}^2 u_j) \\
 & +\beta(\lambda_j^\theta a_j a_{j+1} u_j - \lambda_{j-1}^\theta a_{j-1}^2 u_j + \lambda_j^\theta a_j u_j u_{j+1} - \lambda_{j-1}^\theta a_j u_{j-1}^2) \\
 & -\eta(\lambda_{j+1}^\theta a_{j+1}^2 a_j - \lambda_j^\theta a_j^2 a_{j-1} + \lambda_{j+1}^\theta u_{j+1}^2 u_j - \lambda_j^\theta u_j^2 u_{j-1}) \\
 & +\eta(\lambda_{j+1}^\theta a_{j+1}^2 u_j - \lambda_j^\theta a_j a_{j-1} u_j + \lambda_{j+1}^\theta a_j u_{j+1}^2 - \lambda_j^\theta a_j u_j u_{j-1}). \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Chúng ta sắp xếp lại các số hạng trong (3.19) và (3.20) để làm xuất hiện hạng tử $a_j - u_j$ như sau:

$$\begin{aligned}
 & -\beta(a_0^2 a_1 + u_0^2 u_1 - a_0 a_1 u_0 - a_0 u_0 u_1) = -\beta[a_0 a_1 (a_0 - u_0) - u_0 u_1 (a_0 - u_0)] \\
 & = -\beta(a_0 a_1 - u_0 u_1)(a_0 - u_0) = -\beta(a_0 a_1 - u_0 a_1 + u_0 a_1 - u_0 u_1)(a_0 - u_0) \\
 & = -\beta[a_1(a_0 - u_0) + u_0(a_1 - u_1)](a_0 - u_0) = -\beta a_1(a_0 - u_0)^2 - \beta u_0(a_0 - u_0)(a_1 - u_1),
 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
 & -\eta \lambda_1^\theta (a_0 a_1^2 + u_0 u_1^2 - a_1^2 u_0 - a_0 u_1^2) = -\eta \lambda_1^\theta [a_1^2 (a_0 - u_0) - u_1^2 (a_0 - u_0)] \\
 & = -\eta \lambda_1^\theta (a_1^2 - u_1^2)(a_0 - u_0) = -\eta \lambda_1^\theta (a_1^2 - a_1 u_1 + a_1 u_1 - u_1^2)(a_0 - u_0) \\
 & = -\eta \lambda_1^\theta [a_1(a_1 - u_1) + u_1(a_1 - u_1)](a_0 - u_0) \\
 & = -\eta \lambda_1^\theta a_1(a_1 - u_1)(a_0 - u_0) - \eta \lambda_1^\theta u_1(a_1 - u_1)(a_0 - u_0).
 \end{aligned}$$

Suy ra,

$$\begin{aligned}
 & (a_0 \frac{d}{dt} a_0 + u_0 \frac{d}{dt} u_0) - (u_0 \frac{d}{dt} a_0 + a_0 \frac{d}{dt} u_0) = -\nu(a_0 - u_0)^2 \\
 & -\beta a_1(a_0 - u_0)^2 - \beta u_0(a_0 - u_0)(a_1 - u_1) \\
 & \quad -\eta \lambda_1^\theta a_1(a_1 - u_1)(a_0 - u_0) - \eta \lambda_1^\theta u_1(a_1 - u_1)(a_0 - u_0). \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
 & -\beta(\lambda_j^\theta a_j^2 a_{j+1} - \lambda_{j-1}^\theta a_{j-1}^2 a_j + \lambda_j^\theta u_j^2 u_{j+1} - \lambda_{j-1}^\theta u_{j-1}^2 u_j) \\
 & +\beta(\lambda_j^\theta a_j a_{j+1} u_j - \lambda_{j-1}^\theta a_{j-1}^2 u_j + \lambda_j^\theta a_j u_j u_{j+1} - \lambda_{j-1}^\theta a_j u_{j-1}^2) \\
 & = -\beta[\lambda_j^\theta a_j a_{j+1}(a_j - u_j) - \lambda_{j-1}^\theta a_{j-1}^2(a_j - u_j) - \lambda_j^\theta u_j u_{j+1}(a_j - u_j) + \lambda_{j-1}^\theta u_{j-1}^2(a_j - u_j)] \\
 & = -\beta \lambda_j^\theta (a_j a_{j+1} - u_j u_{j+1})(a_j - u_j) + \beta \lambda_{j-1}^\theta (a_{j-1}^2 - u_{j-1}^2)(a_j - u_j) \\
 & = -\beta \lambda_j^\theta (a_j a_{j+1} - u_j a_{j+1} + u_j a_{j+1} - u_j u_{j+1})(a_j - u_j) \\
 & +\beta \lambda_{j-1}^\theta (a_{j-1}^2 - a_{j-1} u_{j-1} + a_{j-1} u_{j-1} - u_{j-1}^2)(a_j - u_j) \\
 & = -\beta \lambda_j^\theta a_{j+1}(a_j - u_j)^2 - \beta \lambda_j^\theta u_j(a_j - u_j)(a_{j+1} - u_{j+1}) \\
 & +\beta \lambda_{j-1}^\theta a_{j-1}(a_{j-1} - u_{j-1})(a_j - u_j) + \beta \lambda_{j-1}^\theta u_{j-1}(a_{j-1} - u_{j-1})(a_j - u_j),
 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
 & -\eta(\lambda_{j+1}^\theta a_{j+1}^2 a_j - \lambda_j^\theta a_j^2 a_{j-1} + \lambda_{j+1}^\theta u_{j+1}^2 u_j - \lambda_j^\theta u_j^2 u_{j-1}) \\
 & + \eta(\lambda_{j+1}^\theta a_{j+1}^2 u_j - \lambda_j^\theta a_j^2 u_{j-1} + \lambda_{j+1}^\theta a_j u_{j+1}^2 - \lambda_j^\theta a_j u_j u_{j-1}) \\
 & = -\eta[\lambda_{j+1}^\theta a_{j+1}^2 (a_j - u_j) - \lambda_j^\theta a_j^2 (a_j - u_j) - \lambda_{j+1}^\theta u_{j+1}^2 (a_j - u_j) + \lambda_j^\theta u_j u_{j-1} (a_j - u_j)] \\
 & = -\eta\lambda_{j+1}^\theta (a_{j+1}^2 - u_{j+1}^2)(a_j - u_j) + \eta\lambda_j^\theta (a_j a_{j-1} - u_j u_{j-1})(a_j - u_j) \\
 & = -\eta\lambda_{j+1}^\theta (a_{j+1}^2 - a_{j+1} u_{j+1} + a_{j+1} u_{j+1} - u_{j+1}^2)(a_j - u_j) \\
 & + \eta\lambda_j^\theta (a_{j-1} a_j - u_{j-1} a_j + u_{j-1} a_j - u_{j-1} u_j)(a_j - u_j) \\
 & = -\eta\lambda_{j+1}^\theta a_{j+1} (a_j - u_j)(a_{j+1} - u_{j+1}) - \eta\lambda_{j+1}^\theta u_{j+1} (a_j - u_j)(a_{j+1} - u_{j+1}) \\
 & + \eta\lambda_j^\theta a_j (a_{j-1} - u_{j-1})(a_j - u_j) + \eta\lambda_j^\theta u_{j-1} (a_j - u_j)^2.
 \end{aligned}$$

Suy ra,

$$\begin{aligned}
 & (a_j \frac{d}{dt} a_j + u_j \frac{d}{dt} u_j) - (u_j \frac{d}{dt} a_j + a_j \frac{d}{dt} u_j) = -\nu \lambda_j^{2\alpha} (a_j - u_j)^2 \\
 & -\beta \lambda_j^\theta a_{j+1} (a_j - u_j)^2 - \beta \lambda_j^\theta u_j (a_j - u_j)(a_{j+1} - u_{j+1}) \\
 & + \beta \lambda_{j-1}^\theta a_{j-1} (a_{j-1} - u_{j-1})(a_j - u_j) + \beta \lambda_{j-1}^\theta u_{j-1} (a_{j-1} - u_{j-1})(a_j - u_j) \\
 & -\eta \lambda_{j+1}^\theta a_{j+1} (a_j - u_j)(a_{j+1} - u_{j+1}) \\
 & -\eta \lambda_{j+1}^\theta u_{j+1} (a_j - u_j)(a_{j+1} - u_{j+1}) + \eta \lambda_j^\theta a_j (a_{j-1} - u_{j-1})(a_j - u_j) + \eta \lambda_j^\theta u_{j-1} (a_j - u_j)^2. \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Từ (3.18), (3.21) và (3.22), ta có

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} (a_0 - u_0)^2 = -2\nu (a_0 - u_0)^2 - 2\beta a_1 (a_0 - u_0)^2 - 2\beta u_0 (a_0 - u_0)(a_1 - u_1) \\
 & -2\eta \lambda_1^\theta a_1 (a_1 - u_1)(a_0 - u_0) - 2\eta \lambda_1^\theta u_1 (a_1 - u_1)(a_0 - u_0), \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} (a_j - u_j)^2 = -2\nu \lambda_j^{2\alpha} (a_j - u_j)^2 - 2\beta \lambda_j^\theta a_{j+1} (a_j - u_j)^2 - 2\beta \lambda_j^\theta u_j (a_j - u_j)(a_{j+1} - u_{j+1}) \\
 & + 2\beta \lambda_{j-1}^\theta a_{j-1} (a_{j-1} - u_{j-1})(a_j - u_j) + 2\beta \lambda_{j-1}^\theta u_{j-1} (a_{j-1} - u_{j-1})(a_j - u_j) \\
 & -2\eta \lambda_{j+1}^\theta a_{j+1} (a_j - u_j)(a_{j+1} - u_{j+1}) - 2\eta \lambda_{j+1}^\theta u_{j+1} (a_j - u_j)(a_{j+1} - u_{j+1}) \\
 & + 2\eta \lambda_j^\theta a_j (a_{j-1} - u_{j-1})(a_j - u_j) + 2\eta \lambda_j^\theta u_{j-1} (a_j - u_j)^2, \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

với $j=1, 2, 3, \dots$.

Từ (3.23) và (3.24), lấy tổng theo j ta được

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{\infty} (a_j - u_j)^2 = -2\nu \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} (a_j - u_j)^2 \\
 & -2\beta \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^\theta a_{j+1} (a_j - u_j)^2 - 2\beta \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^\theta u_j (a_j - u_j)(a_{j+1} - u_{j+1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\beta \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j-1}^{\theta} a_{j-1} (a_{j-1} - u_{j-1})(a_j - u_j) + 2\beta \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j-1}^{\theta} u_{j-1} (a_{j-1} - u_{j-1})(a_j - u_j) \\
& -2\eta \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j+1}^{\theta} a_{j+1} (a_j - u_j)(a_{j+1} - u_{j+1}) \\
& -2\eta \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j+1}^{\theta} u_{j+1} (a_j - u_j)(a_{j+1} - u_{j+1}) + 2\eta \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{\theta} a_j (a_{j-1} - u_{j-1})(a_j - u_j) \\
& +2\eta \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{\theta} u_{j-1} (a_j - u_j)^2.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Vì $a_j = u_j = 0$ với $j < 0$, ta thu gọn (3.25) thành

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{\infty} (a_j - u_j)^2 = -2\nu \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} (a_j - u_j)^2 \\
& -2\beta \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{\theta} a_{j+1} (a_j - u_j)^2 + 2\beta \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j-1}^{\theta} a_{j-1} (a_{j-1} - u_{j-1})(a_j - u_j) \\
& -2\eta \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j+1}^{\theta} u_{j+1} (a_j - u_j)(a_{j+1} - u_{j+1}) + 2\eta \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{\theta} u_{j-1} (a_j - u_j)^2.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Lấy tích phân (3.26) trên $[0, t]$ và sử dụng $a(0) = u(0)$, ta có

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{\infty} (a_j(t) - u_j(t))^2 = -2\nu \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \lambda_j^{2\alpha} (a_j(\tau) - u_j(\tau))^2 d\tau \\
& -2\beta \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \lambda_j^{\theta} a_{j+1}(\tau) (a_j(\tau) - u_j(\tau))^2 d\tau \\
& +2\beta \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \lambda_{j-1}^{\theta} a_{j-1}(\tau) (a_{j-1}(\tau) - u_{j-1}(\tau))(a_j(\tau) - u_j(\tau)) d\tau \\
& -2\eta \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \lambda_{j+1}^{\theta} u_{j+1}(\tau) (a_j(\tau) - u_j(\tau))(a_{j+1}(\tau) - u_{j+1}(\tau)) d\tau \\
& +2\eta \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \lambda_j^{\theta} u_{j-1}(\tau) (a_j(\tau) - u_j(\tau))^2 d\tau = -2\nu \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \lambda_j^{2\alpha} (a_j(\tau) - u_j(\tau))^2 d\tau \\
& +A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
A_1 &= -2\beta \sum_{j=0}^{J-1} \int_0^t \lambda_j^{\theta} a_{j+1}(\tau) (a_j(\tau) - u_j(\tau))^2 d\tau, \\
A_2 &= 2\beta \sum_{j=0}^{J-1} \int_0^t \lambda_j^{\theta} a_j(\tau) (a_j(\tau) - u_j(\tau))(a_{j+1}(\tau) - u_{j+1}(\tau)) d\tau, \\
A_3 &= -2\eta \sum_{j=0}^{J-1} \int_0^t \lambda_{j+1}^{\theta} u_{j+1}(\tau) (a_j(\tau) - u_j(\tau))(a_{j+1}(\tau) - u_{j+1}(\tau)) d\tau, \\
A_4 &= 2\eta \sum_{j=0}^{J-1} \int_0^t \lambda_{j+1}^{\theta} u_j(\tau) (a_{j+1}(\tau) - u_{j+1}(\tau))^2 d\tau,
\end{aligned}$$

$$B_1 = -2\beta \sum_{j=J}^{\infty} \int_0^t \lambda_j^{\theta} a_{j+1}(\tau) (a_j(\tau) - u_j(\tau))^2 d\tau,$$

$$B_2 = 2\beta \sum_{j=J}^{\infty} \int_0^t \lambda_j^{\theta} a_j(\tau) (a_j(\tau) - u_j(\tau)) (a_{j+1}(\tau) - u_{j+1}(\tau)) d\tau,$$

$$B_3 = -2\eta \sum_{j=J}^{\infty} \int_0^t \lambda_{j+1}^{\theta} u_{j+1}(\tau) (a_j(\tau) - u_j(\tau)) (a_{j+1}(\tau) - u_{j+1}(\tau)) d\tau,$$

$$B_4 = 2\eta \sum_{j=J}^{\infty} \int_0^t \lambda_{j+1}^{\theta} u_j(\tau) (a_{j+1}(\tau) - u_{j+1}(\tau))^2 d\tau.$$

Chúng ta tiến hành ước lượng các số hạng trong (3.27) như sau:

$$B_1 = -2\beta \sum_{j=J}^{\infty} \int_0^t \lambda_j^{\theta} a_{j+1}(\tau) (a_j(\tau) - u_j(\tau))^2 d\tau \leq 2|\beta| C_0 \lambda^{2\alpha-\theta} \sum_{j=J}^{\infty} \int_0^t \lambda_j^{2\alpha} (a_j(\tau) - u_j(\tau))^2 d\tau.$$

$$\begin{aligned} B_2 &= 2\beta \sum_{j=J}^{\infty} \int_0^t \lambda_j^{\theta} a_j(\tau) (a_j(\tau) - u_j(\tau)) (a_{j+1}(\tau) - u_{j+1}(\tau)) d\tau \\ &\leq 2|\beta| C_0 \sum_{j=J}^{\infty} \int_0^t \lambda_j^{\theta} \lambda_j^{2\alpha-\theta} (a_j(\tau) - u_j(\tau)) (a_{j+1}(\tau) - u_{j+1}(\tau)) d\tau \\ &\leq |\beta| C_0 \lambda^{-\alpha} \sum_{j=J}^{\infty} \int_0^t \lambda_j^{2\alpha} (a_j(\tau) - u_j(\tau))^2 d\tau + |\beta| C_0 \lambda^{-\alpha} \sum_{j=J}^{\infty} \int_0^t \lambda_{j+1}^{2\alpha} (a_{j+1}(\tau) - u_{j+1}(\tau))^2 d\tau. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3 &= -2\eta \sum_{j=J}^{\infty} \int_0^t \lambda_{j+1}^{\theta} u_{j+1}(\tau) (a_j(\tau) - u_j(\tau)) (a_{j+1}(\tau) - u_{j+1}(\tau)) d\tau \\ &\leq 2|\eta| C_0 \sum_{j=J}^{\infty} \int_0^t \lambda_{j+1}^{\theta} \lambda_{j+1}^{2\alpha-\theta} (a_j(\tau) - u_j(\tau)) (a_{j+1}(\tau) - u_{j+1}(\tau)) d\tau \\ &\leq |\eta| C_0 \lambda^{\alpha} \sum_{j=J}^{\infty} \int_0^t \lambda_j^{2\alpha} (a_j(\tau) - u_j(\tau))^2 d\tau + |\eta| C_0 \lambda^{\alpha} \sum_{j=J}^{\infty} \int_0^t \lambda_{j+1}^{2\alpha} (a_{j+1}(\tau) - u_{j+1}(\tau))^2 d\tau. \end{aligned}$$

$$B_4 = 2\eta \sum_{j=J}^{\infty} \int_0^t \lambda_{j+1}^{\theta} u_j(\tau) (a_{j+1}(\tau) - u_{j+1}(\tau))^2 d\tau \leq 2|\eta| C_0 \lambda^{\theta-2\alpha} \sum_{j=J}^{\infty} \int_0^t \lambda_{j+1}^{2\alpha} (a_{j+1}(\tau) - u_{j+1}(\tau))^2 d\tau.$$

Mặt khác, lặp lại chứng minh như trong chứng minh Định lý 3.1, chúng ta sẽ có nghiệm $a(t)$ và $u(t)$ thỏa mãn (3.8). Do đó, sử dụng bất đẳng thức Cauchy, chúng ta có:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \leq C_1 \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t (a_j(\tau) - u_j(\tau))^2 d\tau.$$

Sử dụng các đánh giá trên, chúng ta có thể đánh giá (3.27) như sau:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (a_j(t) - u_j(t))^2 &\leq -2\nu \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \lambda_j^{2\alpha} (a_j(\tau) - u_j(\tau))^2 d\tau + C_1 \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t (a_j(\tau) - u_j(\tau))^2 d\tau \\ &\quad + 2C_0 (|\beta| \lambda^{2\alpha-\theta} + |\beta| \lambda^{-\alpha} + |\eta| \lambda^{\alpha} + |\eta| \lambda^{\theta-2\alpha}) \sum_{j=J}^{\infty} \int_0^t \lambda_j^{2\alpha} (a_j(\tau) - u_j(\tau))^2 d\tau. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Sử dụng (3.17) và (3.28), ta có:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (a_j(t) - u_j(t))^2 \leq C_1 \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t (a_j(\tau) - u_j(\tau))^2 d\tau. \quad (3.29)$$

Tính duy nhất nghiệm được chứng minh nhờ sử dụng bất đẳng thức Gronwall và (3.29).

Sự tồn tại nghiệm Leray-Hopf của (1.2) với tính chất không âm là nội dung của định lý sau:

Định lý 3.4. *Giả sử ν, α là các số thực dương, β là số thực không âm, η là số thực không dương và $a^0 \in S^0$ thỏa mãn $a_j^0 \geq 0$ với mọi $j = 0, 1, \dots$. Với mọi $t \geq 0$, giả sử rằng $\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{-2\alpha} \int_0^t b_j^2(\tau) d\tau < \infty$. Khi đó, bài toán (1.2) có nghiệm Leray-Hopf không âm $a(t)$ (theo Định nghĩa 2.3) trên $[0, \infty)$ thỏa mãn $a(0) = a^0$.*

Chứng minh. Chúng ta thấy giả thiết của Định lý 3.1 thỏa mãn nên hệ (1.2) có nghiệm Leray-Hopf $a(t)$. Hơn nữa, theo lý thuyết phương trình vi phân, nghiệm tổng quát của (1.2) có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{cases} a_0(t) = a_0(0)e^{-\int_0^t (\nu + \beta a_1(\tau)) d\tau} + \int_0^t e^{-\int_s^t (\nu + \beta a_1(\tau)) d\tau} (b_0(s) - \eta \lambda_1^\theta a_1^2(s)) ds, \\ a_j(t) = a_j(0)e^{-\int_0^t (\nu \lambda_j^{2\alpha} + \beta \lambda_j^\theta a_{j+1} - \eta \lambda_j^\theta a_{j-1}) d\tau} \int_0^t e^{-\int_s^t (\nu \lambda_j^{2\alpha} + \beta \lambda_j^\theta a_{j+1} - \eta \lambda_j^\theta a_{j-1}) d\tau} (b_j(s) + \beta \lambda_{j-1}^\theta a_{j-1}^2(s) - \eta \lambda_{j+1}^\theta a_{j+1}^2(s)) ds, \end{cases}$$

với $j = 1, 2, 3, \dots$. (3.30)

Vì $a_j(0) = a_j^0 \geq 0$, $b_j(s) \geq 0$, β là số thực không âm và η là số thực không dương, chúng ta thấy rằng vế phải của các phương trình (3.30) là không âm với mọi $j = 0, 1, \dots$ và $t > 0$. Điều này kéo theo nghiệm Leray-Hopf $a(t)$ là không âm với mọi $t > 0$.

Tính duy nhất nghiệm Leray-Hopf không âm là nội dung của định lý sau.

Định lý 3.5. *Giả sử giả thiết của Định lý 3.4 thỏa mãn. Hơn nữa, giả sử tồn tại số J thỏa mãn $|a_j(t)| \leq C_0 \lambda_j^{2\alpha-\theta}$, $\forall j \geq J$, và $t \in [0, \infty)$, trong đó C_0 là hằng số thỏa mãn $C_0(|\beta| \lambda^{2\alpha-\theta} + |\beta| \lambda^{-\alpha} + |\eta| \lambda^\alpha + |\eta| \lambda^{\theta-2\alpha}) \leq \nu$. Khi đó, bài toán (1.2) có duy nhất nghiệm Leray-Hopf không âm $a(t)$ trên $[0, \infty)$ thỏa mãn $a(0) = a^0$.*

Chứng minh. Định lý này là kết quả trực tiếp suy ra từ Định lý 3.3 và Định lý 3.4.

4. KẾT LUẬN

Nội dung của bài báo đã trình bày được sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm Leray-Hopf và nghiệm Leray-Hopf không âm của mô hình bài toán rời rạc xấp xỉ phương trình Navier-Stokes bậc phân thứ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] J. Wu (2003), *Generalized MHD equations*, Journal of Differential Equations, 195(2), 284-312.
- [2] T. Luo and E. S. Titi (2020), *Non-uniqueness of weak solutions to hyperviscous Navier-Stokes equations: On sharpness of J.-L. Lions exponent*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 59:92.
- [3] N.T. Le, L.T. Tinh (2025), *On the three dimensional generalized Navier-Stokes equations with damping*, Fractional Calculus and Applied Analysis, 28(5)1923-1967.

- [4] M. Dai (2021), *Blow-up of a dyadic model with intermittency dependence for the Hall MHD*, Physica D: Nonlinear Phenomena, 428, Paper No. 133066, 13 pp.
- [5] Y. Dai, W. Hu, J. Wu and B. Xiao (2020), *The Littlewood - Paley decomposition for periodic functions and applications to the Boussinesq equations*, Anal. Appl. Singap. 18(4) 639-682.
- [6] P.T. Vân, L.T. Tình, L.T. Mai (2024), *Mô hình bài toán rời rạc xấp xỉ phương trình Navier-Stokes bậc phân*, Tạp chí Khoa học Trường Đại học Hồng Đức, 71(11) 101-110.
- [7] N. Katz, N. Pavlović (2005), *Finite time blow-up for a dyadic model of the Euler equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 357(2) 695-708.
- [8] A.M. Obukhov (1971), *Some general properties of equations describing the dynamics of the atmosphere*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz. Atmosfer. i Okeana, 7, 695-704.
- [9] A. Cheskidov (2008), *Blow-up in finite time for the dyadic model of the Navier-Stokes equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 360(10) 5101-5120.
- [10] L. Grafakos (2008), *Classical Fourier Analysis*, Second edition.. Graduate Texts in Mathematics, Springer, vol.249.
- [11] F. Weisz (2012), *Summability of Multi-Dimensional Trigonometric Fourier Series*, Surveys in Approximation Theory, 17, 1-179.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF LERAY-HOPF SOLUTIONS AND NON-NEGATIVE LERAY-HOPF SOLUTIONS OF DYADIC MODELS FOR THE GENERALIZED NAVIER-STOKES EQUATIONS

Le Tran Tinh, Pham Thi Van, Le Chau Giang, Luu Cam Anh,
Pham Thi Quy, Le Trinh Nhu Quynh

ABSTRACT

In this article, we study the existence and uniqueness of Leray-Hopf solutions and non-negative Leray-Hopf solutions of dyadic models for the 3D generalized Navier-Stokes equations. Our results extend and improve the previous results.

Keywords: *Generalized Navier-Stokes equations, Leray-Hopf solutions, non-negative Leray-Hopf solutions.*

* Ngày nộp bài: 06/6/2025; Ngày gửi phản biện: 09/6/2025; Ngày duyệt đăng: 25/9/2025

* Bài báo là kết quả nghiên cứu từ đề tài NCKH cấp cơ sở (mã số ĐT-2024-01) của Trường Đại học Hồng Đức.