

BÀI TOÁN KÉO DÀI MỞ RỘNG VÀNH

Phạm Thị Cúc¹

TÓM TẮT

Trong bài báo này, trước hết chúng tôi phát biểu bài toán kéo dài mở rộng vành và chỉ ra rằng dữ liệu của bài toán kéo dài mở rộng (bộ ba (E, F, θ)) xác định một E -hệ chính qui. Mỗi mở rộng của E -hệ chính qui này là một kéo dài của mở rộng E . Tiếp đến, chúng tôi chứng minh kết quả về sự phân lớp các mở rộng của E -hệ chính qui. Từ đó, thu được kết quả về bài toán kéo dài mở rộng vành.

Từ khóa: Ann-phạm trừ, E -hệ chính qui, kéo dài mở rộng vành.

DOI: <https://doi.org/10.70117/hdujs.79.09.2025.836>

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Khi nghiên cứu về các cấu trúc đại số, một trong những vấn đề thường được đặt ra là mở rộng hoặc thu hẹp cấu trúc đó với những mục đích nghiên cứu khác nhau. Vì vậy, các bài toán mở rộng nhóm, mở rộng vành,... được rất nhiều nhà đại số quan tâm nghiên cứu. Trong những năm gần đây, bài toán mở rộng các cấu trúc đại số đã được nghiên cứu rộng rãi nhờ mối liên hệ với các lý thuyết phạm trừ và lý thuyết đối đồng điều tương ứng [1][2][3][4][5].

Thông thường, mỗi cấu trúc đại số đều có một lý thuyết đồng điều và đối đồng điều tương ứng. Cấu trúc nhóm là cấu trúc đầu tiên có một lý thuyết đồng điều, đối đồng điều và lý thuyết mở rộng nhóm hoàn chỉnh [1]. Sau đó, có những nghiên cứu tương tự cho mở rộng đại số kết hợp và đại số Lie trên một trường [6]. Hai trường hợp này đều có cấu trúc cộng của không gian vectơ nên bài toán mở rộng cấu trúc cộng là tầm thường và chỉ cấu trúc nhân là thực sự suy ra từ lý thuyết đối đồng điều. Với bài toán mở rộng vành, chúng ta gặp vấn đề khó khăn hơn là phải đồng thời xử lý hai cấu trúc cộng và nhân. MacLane là người có công đầu tiên trong việc xây dựng khái niệm đồng điều và đối đồng điều vành. Xuất phát từ mục đích giải quyết bài toán mở rộng vành, ông đã xây dựng một phức mà nhóm đối đồng điều thứ 2 và thứ 3 của nó phù hợp với yêu cầu giải quyết bài toán mở rộng vành [7].

Bài toán mở rộng vành của MacLane đã được Quang tiếp cận theo một cách khác nhờ sử dụng đối đồng điều của Hochschild [4]. Hơn nữa, Quang cũng đã phát hiện ra mối liên hệ giữa bài toán mở rộng vành và lý thuyết Ann-phạm trừ [8], nên đã giải quyết bài toán này trong trường hợp đặc biệt (gọi là bài toán mở rộng vành $\mathbb{Z}$ -ché ra) nhờ các kết quả của lý thuyết Ann-phạm trừ [9]. Một số kết quả khác liên quan đến song mô đun chéo trên vành (một khái niệm có liên quan chặt chẽ đến bài toán mở rộng vành) đã được chỉ ra trong [5][10]. Ngoài ra, một số kết quả về Ann-hàm tử cũng đã được công bố trong [11].

¹ Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức; Email: phamthicuc@hdu.edu.vn

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

2.1. Bài toán mở rộng vành

Định nghĩa 2.1. [7] Một *song tích* σ của một vành A là một cặp các ánh xạ $a \mapsto \sigma a, a \mapsto a\sigma$ từ A vào chính nó thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $a, b \in A$:

$$\sigma(a+b) = \sigma a + \sigma b, \quad (a+b)\sigma = a\sigma + b\sigma,$$

$$\sigma(ab) = (\sigma a)b, \quad (ab)\sigma = a(b\sigma), \quad a(\sigma b) = (a\sigma)b.$$

Tổng $\sigma + \tau$ và tích $\sigma\tau$ của hai song tích σ và τ được định nghĩa như sau:

$$(\sigma + \tau)a = \sigma a + \tau a, \quad a(\sigma + \tau) = a\sigma + a\tau,$$

$$(\sigma\tau)a = \sigma(\tau a), \quad a(\sigma\tau) = (a\sigma)\tau.$$

Tập hợp M_A tất cả các song tích của A cùng với hai phép toán trên lập thành một vành có đơn vị, trong đó phần tử đơn vị là song tích cho bởi cặp ánh xạ đồng nhất.

Hai song tích σ và τ gọi là *hoán vị được* (hay *giao hoán được*) nếu chúng thỏa mãn:

$$\sigma(a\tau) = (\sigma a)\tau, \quad \tau(a\sigma) = (\tau a)\sigma, \quad \forall a \in A.$$

Mỗi phần tử $c \in A$ cảm sinh một song tích μ_c xác định như sau:

$$\mu_c a = ca, \quad a\mu_c = ac, \quad \forall a \in A,$$

và được gọi là một *song tích trong* của A . Ánh xạ $\mu: A \rightarrow M_A, c \mapsto \mu_c$, là một đồng cấu vành, và nếu A có đơn vị thì $\mu(1) = id$. Ảnh μA của đồng cấu μ là một ideal hai phía của vành M_A (do $\sigma\mu_c = \mu_{\sigma c}, \mu_c\sigma = \mu_{c\sigma}$). Khi đó, vành thương $P_A = M_A / \mu A$ được gọi là vành các *song tích ngoài* hay vành các *lớp song tích* của vành A .

Hạt nhân của μ , $K_A = \{c \in A \mid ca = 0 = ac, \forall a \in A\}$, là một ideal hai phía của A và được gọi là *song tâm* của A . Chú ý rằng K_A vừa là một P_A -môđun trái, vừa là một P_A -môđun phải với các toán tử $k \mapsto \sigma k, k \mapsto k\sigma$ tương ứng. Tuy nhiên, K_A không phải là một P_A -song môđun.

Định nghĩa 2.2. [7] Một *mở rộng* E của vành A bởi vành Π là một dãy khớp ngắn các đồng cấu vành:

$$E: \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} \Pi \longrightarrow 0$$

Khi Π là một vành có đơn vị thì ta cũng đòi hỏi β là một đồng cấu giữa các vành có đơn vị và biến đơn vị thành đơn vị. Vì $A \cong \alpha A$ là ideal của B nên phép đặt tương ứng mỗi phần tử $b \in B$ với song tích trong μ_b của nó cho ta một đồng cấu $\mu: B \rightarrow M_A$. Hơn nữa, hai song tích trong μB là hoán vị được. Vì đồng cấu μ này biến ideal αA thành những song tích trong của A nên nó cảm sinh một đồng cấu: $\bar{\mu}: B / \alpha A \rightarrow M_A / \mu A = P_A$.

Do $\Pi \cong B / \text{Ker}\beta = B / \alpha A$ nên ta có đồng cấu $\theta: \Pi \rightarrow P_A$. Vì mọi cặp song tích trong của μB là hoán vị được nên mọi cặp phần tử của ảnh $\theta(A)$ là hoán vị được.

Như vậy, mỗi mở rộng E cho trước đều cảm sinh đồng cấu θ sao cho mọi phần tử của ảnh $\theta(A)$ là hoán vị được. Bài toán mở rộng vành được đặt ra là: “Nếu cho trước các vành

A, Π và đồng cấu θ thì có tồn tại một mở rộng tương ứng hay không, vào nếu tồn tại thì có bao nhiêu mở rộng theo nghĩa tương đẳng?”

Hai mở rộng E và E' được gọi là *tương đẳng* nếu tồn tại một đồng cấu vành $\varphi: B \rightarrow B'$ sao cho biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} E: & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & \Pi & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow id & & \downarrow \varphi & & \downarrow id & & \\ E': & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & \Pi & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Từ tính giao hoán của biểu đồ này suy ra $\varphi: B \rightarrow B'$ là một đẳng cấu.

MacLane [1] đã chỉ ra rằng từ các dữ kiện của bài toán mở rộng vành suy ra tồn tại một 3-đối chu trình $f \in \text{Hom}(\Pi, K_A)$ mà lớp đối đồng điều ba chiều của nó được gọi là *cái cản trở* của $\theta: \Pi \rightarrow P_A$. Khi đó, điều kiện cần và đủ để tồn tại một mở rộng của vành A bởi vành Π cảm sinh đồng cấu $\theta: \Pi \rightarrow P_A$ là cái cản trở của θ bằng 0. Hơn nữa, số lời giải của bài toán mở rộng vành được cho trong định lý dưới đây.

Định lý 2.3. [7] *Nếu tồn tại một mở rộng vành của A bởi Π cảm sinh $\theta: \Pi \rightarrow P_A$ thì tập hợp các lớp tương đẳng của những mở rộng đó tương ứng 1-1 với nhóm đối đồng điều $H^2(\Pi, K_A)$, trong đó song tâm K_A của A là một Π -song môđun với tác động cảm sinh θ .*

2.2. Ann-phạm trừ và Ann-hàm tử

Các khái niệm Ann-phạm trừ và Ann-hàm tử đã được trình bày chi tiết trong [8, 10]. Ở đây, chúng tôi chỉ nhắc lại phép dựng Ann-phạm trừ thu gọn của một Ann-phạm trừ và một vài kết quả đã biết về Ann-hàm tử.

Cho $\mathbb{A}$ là một Ann-phạm trừ. Tập $R = \pi_0 \mathbb{A}$ các lớp vật đẳng cấu của $\mathbb{A}$ là một vành đối với hai phép toán cộng và nhân được cảm sinh từ các luật $\oplus, \otimes$ trên $\mathbb{A}$, còn tập $M = \pi_1 \mathbb{A} = \text{Aut}(0)$ các tự đẳng cấu của vật 0 là một nhóm aben mà phép hợp thành được ký hiệu bởi dấu $+$. Hơn nữa, M là một R -song môđun.

Ann-phạm trừ thu gọn $\mathbb{S}_{\mathbb{A}}$ được xây dựng nhờ phép chuyển cấu trúc (xem [5]), có các vật là các phần tử của $\pi_0 \mathbb{A}$, các mũi tên là những tự đẳng cấu $(s, u): s \rightarrow s, s \in \pi_0 \mathbb{A}, u \in \pi_1 \mathbb{A}$. Hợp thành của hai mũi tên được xác định bởi: $(s, u) \circ (s, v) = (s, u + v)$.

Khi đó, phạm trừ $\mathbb{A}$ tương đương với phạm trừ $\mathbb{S}_{\mathbb{A}}$ và ta cũng gọi $\mathbb{S}_{\mathbb{A}}$ là một Ann-phạm trừ kiểu (R, M) . Hơn nữa, mỗi Ann-hàm tử giữa các Ann-phạm trừ $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ cảm sinh một Ann-hàm tử giữa các Ann-phạm trừ thu gọn $\mathbb{S}_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{A}'}$ và tập các lớp đồng luân của các Ann-hàm tử là tương ứng 1-1 với nhóm đối đồng điều vành 2 chiều theo nghĩa của MacLane [1].

Định lý 2.4. [10] i) *Mỗi Ann-hàm tử $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ cảm sinh một Ann-hàm tử $\mathbb{S}_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{A}'}$ kiểu (p, q) , trong đó $p: \pi_0 \mathbb{A} \rightarrow \pi_0 \mathbb{A}', q: \pi_1 \mathbb{A} \rightarrow \pi_1 \mathbb{A}'$.*

ii) Hàm tử $F : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ kiểu (p, q) từ Ann-phạm trừ $\mathbb{S}$ kiểu (R, M) đến từ Ann-phạm trừ $\mathbb{S}'$

kiểu (R', M') là một Ann-hàm tử nếu và chỉ nếu cái cản trở $\bar{k}$ triệt tiêu trong $H_{MacL}^3(R, M')$.

Khi đó, tồn tại song ánh $\text{Hom}_{(p,q)}^{Ann}[\mathbb{S}, \mathbb{S}'] \leftrightarrow H_{MacL}^2(R, M')$, trong đó $\text{Hom}_{(p,q)}^{Ann}[\mathbb{S}, \mathbb{S}']$ là tập các lớp đồng luân của các Ann-hàm tử kiểu (p, q) từ $\mathbb{S}$ đến từ $\mathbb{S}'$.

2.3. E-hệ chính qui

Định nghĩa 2.5. [12] Một E-hệ là một bộ bốn (B, D, d, θ) , trong đó $d : B \rightarrow D, \theta : D \rightarrow M_B$ là các đồng cấu vành thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x \in D, b \in B$.

$$\theta \circ d = \mu, \quad d(\theta_x b) = x.d(b), \quad d(b\theta_x) = d(b).x.$$

E-hệ (B, D, d, θ) được gọi là *chính qui* nếu θ là đồng cấu biến đơn vị thành đơn vị và các phần tử thuộc $\theta(D)$ là hoán vị được.

Một *đồng cấu* $(f_1, f_0) : (B, D, d, \theta) \rightarrow (B', D', d', \theta')$ giữa hai E-hệ bao gồm các đồng cấu vành $f_1 : B \rightarrow B', f_0 : D \rightarrow D'$ sao cho $f_0 d = d' f_1$ và f_1 là một đồng cấu toán tử, nghĩa là $f_1(\theta_x b) = \theta'_{f_0(x)} f_1(b), f_1(b\theta_x) = f_1(b)\theta'_{f_0(x)}$.

Để cho tiện, E-hệ (B, D, d, θ) đôi khi còn được ký hiệu bởi $B \xrightarrow{d} D$ hoặc đơn giản là $B \rightarrow D$. Từ định nghĩa E-hệ, ta thấy ngay các tính chất sau.

Mệnh đề 2.6. [12] Cho E-hệ (B, D, d, θ) . Khi đó,

i) $\text{Ker} d \subset K_B$,

ii) $\text{Im} d$ là một *ideal* trong D ,

iii) Đồng cấu θ cảm sinh đồng cấu $\varphi : D \rightarrow M_{\text{Ker} d}$ cho bởi $\varphi_x = \theta_x|_{\text{Ker} d}$,

iv) $\text{Ker} d$ là Cokerd-song môđun với tác động:

$$sa = \varphi_x(a), \quad as = a\varphi_x, \quad a \in \text{Ker} d, x \in s, s \in \text{Coker} d.$$

3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

3.1. Bài toán kéo dài mở rộng vành

Định nghĩa 3.1. Cho các mở rộng vành E của A bởi Π , mở rộng vành E' của A bởi Π' và mở rộng vành F của Π bởi Π_0

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & F : & 0 & \\
 & & & & & \downarrow & \\
 E : & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & \Pi & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow id & & \downarrow \beta & & \downarrow \lambda & & \\
 E' : & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{p'} & \Pi' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & & \downarrow \sigma & & \\
 & & & & & & & \Pi_0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Trong đó i là đồng cấu tâm (nghĩa là $i(A) \subset K_B$), các hình vuông giao hoán. Khi đó, ta nói mở rộng E' là kéo dài của mở rộng E , ký hiệu $E' = E\lambda$.

Nhận xét 3.2.

i) Do các mũi tên λ và i' là đơn cấu nên β cũng là đơn cấu.

ii) Từ định nghĩa trên ta suy ra dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\beta} B' \xrightarrow{\sigma p'} \Pi_0 \longrightarrow 0$$

Với dãy khớp ngắn này, ta có $B \cong \beta B'$ là ideal hai phía của B' . Phép đặt tương ứng mỗi $b' \in B'$ với song tích trong $\mu_{b'}$ của nó cho ta một đồng cấu vành $\mu : B' \rightarrow M_B$, $\mu_{b'}b = b'b$, $b\mu_{b'} = bb'$.

Khi đó, μ cảm sinh đồng cấu vành $\theta : \Pi' \rightarrow M_B$, $\theta_{x'} = \mu_{u(x')}$, (với $x' \in \Pi'$ thì $u(x') \in B'$ sao cho $p'(u(x')) = x'$) thỏa mãn hai tính chất

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & \Pi' \\
 \mu \searrow & & \swarrow \theta \\
 & M_B &
 \end{array} \quad \text{với } \bar{\sigma} = \lambda p \tag{1}$$

$$\bar{\sigma}(\theta_{x'}b) = \mu_{x'}(\bar{\sigma}(b)), \quad \bar{\sigma}(b\theta_{x'}) = \bar{\sigma}(b)\mu_{x'}, \quad \forall x' \in \Pi', \forall b \in B. \tag{2}$$

3.2. Mỗi bộ ba (E, F, θ) của bài toán kéo dài mở rộng cảm sinh một E-hệ chính qui

Định nghĩa 3.3. Ta gọi một bộ ba (E, F, θ) của bài toán kéo dài mở rộng bao gồm các mở rộng

$$\begin{array}{l}
 E : \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} \Pi \longrightarrow 0 \\
 F : \quad 0 \longrightarrow \Pi \xrightarrow{\lambda} \Pi' \xrightarrow{\sigma} \Pi_0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

sao cho $i(A) \subset K_B$, và một đồng cấu vành $\theta : \Pi' \rightarrow M_B$ thỏa mãn các hệ thức (1) và (2).

Như vậy, mỗi bộ ba (E, F, θ) của bài toán kéo dài mở rộng vành xác định một E-hệ $(B, \Pi', \lambda p, \theta)$. Vấn đề đặt ra là có tồn tại hay không một mở rộng vành của A bởi Π' , là kéo dài của mở rộng E và cảm sinh θ ? Trong trường hợp tồn tại kéo dài mở rộng, thì “số lời giải” là bao nhiêu? Để cho tiện, ta đồng nhất mỗi phần tử $a \in A$ với ảnh $i(a)$ của nó trong B , và đồng nhất mỗi phần tử $x \in \Pi$ với ảnh $\lambda(x)$ của nó trong Π' .

3.3. Ann-phạm trừ chặt chẽ xác định bởi E-hệ

Với mỗi E-hệ (B, D, d, θ) ta có thể xây dựng được một Ann-phạm trù chặt chẽ $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{B \rightarrow D}$, gọi là Ann-phạm trù chặt chẽ xác định bởi E-hệ, như sau: $\text{Ob}(\mathbb{P}) = D$.

Với hai vật x, y của $\mathbb{P}$ thì $\text{Hom}(x, y) = \{b \in B \mid y = db + x\}$.

Hợp thành của các mũi tên được cho bởi: $(x \xrightarrow{b} y \xrightarrow{c} z) = (x \xrightarrow{b+c} z)$.

Tổng hai vật: $x \oplus y = x + y$ (phép cộng trong D).

Tổng hai mũi tên: $(x \xrightarrow{b} y) \oplus (x' \xrightarrow{b'} y') = (x + x' \xrightarrow{b+b'} y + y')$.

Phép toán tensor trên các vật được cho bởi phép nhân trong vành $D: x \otimes y = xy$, và với hai mũi tên $(x \xrightarrow{b} y), (x' \xrightarrow{b'} y')$ thì phép toán tensor trên các mũi tên là

$$(x \xrightarrow{b} y) \otimes (x' \xrightarrow{b'} y') = (xx' \xrightarrow{bb' + \theta b_x + \theta_x b'} yy').$$

Từ định nghĩa của E-hệ, dễ kiểm tra được rằng $\otimes$ là một hàm tử và $\mathbb{P}$ trở thành một Ann-phạm trù với các ràng buộc được xác định đều là chặt chẽ. Ann-phạm trù thu gọn $\mathbb{S}_{\mathbb{P}} = (\text{Coker}d, \text{Ker}d, k), \bar{k} \in H^3(\text{Coker}d, \text{Ker}d)$.

Trong trường hợp E-hệ $(B, \Pi', \lambda p, \theta)$ được xác định bởi bộ ba (E, F, θ) của bài toán kéo dài mở rộng thì ta có

$$\pi_0 \mathbb{P} = \text{Coker}(\lambda p) = \text{Coker} \lambda \cong \Pi_0, \quad \pi_1 \mathbb{P} = \text{Ker}(\lambda p) = \text{Ker} p \cong A, \quad \bar{k} \in H^3(\Pi_0, A).$$

Đặc biệt, vành D được xem như một Ann-phạm trù kiểu $(D, 0, 0)$, ký hiệu bởi $\text{Dis}D$, ta có kết quả sau:

Mệnh đề 3.4. Cho $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{B \rightarrow D}$ là Ann-phạm trù chặt chẽ xác định bởi E-hệ (B, D, d, θ) và $\mathbb{S}_{\mathbb{P}} = (\text{Coker}d, \text{Ker}d, k)$ là một Ann-phạm trù thu gọn của $\mathbb{P}$. Khi đó, tồn tại một Ann-hàm tử $F: \text{Dis}D \rightarrow \mathbb{P}$ cảm sinh toàn cấu chính tắc $\gamma: D \rightarrow \text{Coker}d$ khi và chỉ khi cái cản trở $\overline{\gamma^* k}$ triệt tiêu trong $H^3(D, \text{Ker}d)$.

Chứng minh: Giả sử tồn tại Ann-hàm tử $F: \text{Dis}D \rightarrow \mathbb{P}$ cảm sinh toàn cấu chính tắc $\gamma: D \rightarrow \text{Coker}d$. Khi đó, theo Định lý 2.4 i), F cảm sinh Ann-hàm tử $\Gamma: \text{Dis}D \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{P}}$ kiểu $(\gamma, 0)$. Bởi vậy, theo Định lý 2.4 ii), ta có $\overline{\gamma^* k} = 0$ trong $H^3(D, \text{Ker}d)$.

Ngược lại, nếu $\overline{\gamma^* k} = 0$ trong $H^3(D, \text{Ker}d)$ thì theo Định lý 2.4 ii), cặp $(\gamma, 0)$ xác định một Ann-hàm tử $\Gamma: \text{Dis}D \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{P}} = (\text{Coker}d, \text{Ker}d, k)$. Gọi $(H, \tilde{H}, \tilde{H}): \mathbb{S}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}$ là Ann-hàm tử chính tắc, thì cái hợp thành $(F, \tilde{F}, \tilde{F}) = \left(\text{Dis}D \xrightarrow{(\Gamma, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Gamma})} \mathbb{S}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{(H, \tilde{H}, \tilde{H})} \mathbb{P} \right)$ là một Ann-hàm tử.

Bổ đề 3.5. $\overline{\gamma^* k} = 0$ trong $H^3(D, \text{Ker}d)$ khi và chỉ khi $\bar{k} = 0$ trong $H^3(\text{Coker}d, \text{Ker}d)$.

Chứng minh: Theo Mệnh đề 2.6.iv), $\text{Ker}d$ là một $\text{Coker}d$ -song môđun với tác động $sa = \theta_x a, \quad as = a\theta_x, \quad a \in \text{Ker}d, x \in s, s \in \text{Coker}d$.

Tác động của D lên $\text{Ker}d$ là cảm sinh bởi tác động của $\text{Coker}d$ lên $\text{Ker}d$ dọc theo đồng cấu γ . Bởi vậy $xa = \gamma(x)a = \theta_x a, \quad ax = a\gamma(x) = a\theta_x, \quad a \in \text{Ker}d, x \in D$.

Bây giờ, giả sử $\gamma^*k = \partial f$, với $f : D^2 \rightarrow \text{Kerd}$. Nghĩa là với mọi $x, y, z \in D$ ta có

$$\gamma^*k(x, y, z) = (\partial f)(x, y, z) = xf(y, z) - f(x+y, z) + f(x, y+z) - f(x, y)$$

hay $k(\gamma x, \gamma y, \gamma z) = (\partial f)(x, y, z) = xf(y, z) - f(x+y, z) + f(x, y+z) - f(x, y)$.

Với mỗi $s \in \text{Cokerd}$ ta chọn một đại diện $x_s \in D$ và đặt $g(r, s) = f(x_r, x_s)$, $sa = x_s a$ ta được $x_r f(x_s, x_t) = rg(s, t)$, và do đó $k(r, s, t) = (\delta g)(r, s, t)$, với $r, s, t \in D$, nghĩa là $\bar{k}$ triệt tiêu trong $H^3(\text{Cokerd}, \text{Kerd})$.

Ngược lại, nếu $k = \partial g$, nghĩa là $k(s, r, t) = sg(r, t) - g(s+r, t) + g(s, r+t) - g(s, r)$ thì ta đặt $f(x, y) = g(\gamma(x), \gamma(y))$, $xa = \gamma(x)a = sa$, với $x \in s, y \in r, z \in t, a \in \text{Kerd}$. Khi đó $(\gamma^*k)(x, y, z) = (\partial f)(x, y, z)$, nghĩa là $\overline{\gamma^*k}$ triệt tiêu trong $H^3(D, \text{Kerd})$.

Mệnh đề 3.6. $\bar{k}$ triệt tiêu trong $H^3(\text{Cokerd}, \text{Kerd})$.

Chứng minh: Gọi $\Gamma : \text{DisD} \rightarrow \mathbb{P}$ là Ann-hàm tử chính tắc. Rõ ràng, Γ cảm sinh toàn cấu chính tắc $\gamma : D \rightarrow \text{Cokerd}$. Bởi vậy, theo Định lý 2.4 ii) và theo Bổ đề 3.5 thì $\bar{k}$ triệt tiêu trong $H^3(\text{Cokerd}, \text{Kerd})$.

Hệ quả 3.7. Với cách chọn đỉnh thích hợp thì Ann-phạm trù thu gọn $\mathbb{S}_p$ là chặt chẽ.

3.4. Phân lớp các mở rộng của E-hệ chính qui

Định nghĩa 3.8. Một mở rộng của E-hệ chính qui (B, D, d, θ) là một dãy khớp ngắn

$$E : \quad 0 \longrightarrow \text{Kerd} \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{p'} D \longrightarrow 0$$

và một đồng cấu vành $\beta : B \rightarrow B'$ sao cho biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} B & \xrightarrow{d} & D & & & & \\ \beta \downarrow & & \downarrow id & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Kerd} & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{p'} & D \longrightarrow 0 \end{array}$$

Đối với E-hệ $(B, \Pi', \lambda p, \theta)$ xác định bởi bộ ba (E, F, θ) thì mỗi mở rộng của nó chính là một kéo dài của mở rộng E . Ký hiệu $\text{Ext}_{B \rightarrow D}(D, \text{Kerd})$ là tập các lớp tương đương các mở rộng của E-hệ chính qui (B, D, d, θ) và ký hiệu $\text{Hom}_{(\gamma, 0)}[\text{DisD}, \mathbb{P}]$ là tập các lớp đồng luân của các Ann-hàm tử từ DisD đến $\mathbb{P}$ cảm sinh cặp $(\gamma, 0)$. Ta có thể phân lớp các mở rộng của E-hệ chính qui bởi các Ann-hàm tử hoán vị được như sau. Nhắc lại rằng một Ann-hàm tử $F : \text{DisD} \rightarrow \mathbb{P}$ được gọi là *hoán vị được* nếu nó thỏa mãn điều kiện $(F_x b)F_y = F_x(bF_y)$, $\forall b \in B$.

Định lý 3.9. Mở rộng của E-hệ chính qui (B, D, d, θ) là tồn tại. Hơn nữa, có một song ánh:

$$\Delta : \text{Hom}_{(\gamma, 0)}[\text{DisD}, \mathbb{P}] \rightarrow \text{Ext}_{B \rightarrow D}(D, \text{Kerd}).$$

Chứng minh: Ta xây dựng ánh xạ Δ như sau: Trong mỗi lớp đồng luân các Ann-hàm tử từ $\text{Dis}D$ đến $\mathbb{P}$ cảm sinh cặp $(\gamma, 0)$, ta lấy một Ann-hàm tử hoán vị được F . Từ đó xây dựng một mở rộng vành E_F của E-hệ chính qui (B, D, d, θ) .

Bước 1: Xây dựng mở rộng vành E_F của E-hệ chính qui (B, D, d, θ) cảm sinh bởi Ann-hàm tử hoán vị được F .

Cho Ann-hàm tử hoán vị được $(F, \tilde{F}, \tilde{F}'): \text{Dis}D \rightarrow \mathbb{P}$. Thế thì ta có các hàm $\tilde{F}_{x,y} = f'(x, y)$, $\tilde{F}_{x,y}' = g'(x, y): D^2 \rightarrow B$ thỏa mãn:

$$F_x + F_y = df'(x, y) + F_{x+y}, \quad F_x F_y = dg'(x, y) + F_{xy}.$$

Do tính tương thích của $(F, \tilde{F}, \tilde{F}')$ với các ràng buộc của Ann-phạm trù chặt chẽ nên các hàm $f'(x, y), g'(x, y)$ là chuẩn hóa ($f'(x, 0) = f'(0, y) = g'(x, 1) = g'(1, y) = 0$) và thỏa mãn các hệ thức:

$$f'(x, y+z) + f'(y, z) - f'(x, z) - f'(x+y, z) = 0, \quad f'(x, y) = f'(y, x),$$

$$F_x g'(y, z) - g'(xy, z) + g'(x, yz) - g'(x, y) F_z = 0,$$

$$g'(x, y+z) - g'(x, y) - g'(x, z) + F_x f'(y, z) - f'(xy, xz) = 0,$$

$$g'(x+y, z) - g'(x, z) - g'(y, z) + f'(x, y) F_z - f'(xz, yz) = 0.$$

Trong $\mathbb{P}$, ta chọn đỉnh $(x_s, i_x), s \in \text{Coker}d$, và đặt $\varphi(s)b = x_s b$, $f(s, r) = f'(x_s, x_r)$, $g(s, r) = g'(x_s, x_r)$ ta được các hệ thức

$$f(s, r+t) + f(r, t) - f(s, r) - f(s+r, t) = 0, \quad (3)$$

$$f(r, s) = f(s, r), \quad (4)$$

$$\varphi(s)g(r, t) - g(sr, t) + g(s, rt) - g(s, r)\varphi(t) = 0, \quad (5)$$

$$g(s, r+t) - g(s, r) - g(s, t) + \varphi(s)f(r, t) - f(sr, st) = 0, \quad (6)$$

$$g(s+r, t) - g(s, t) - g(r, t) + f(s, r)\varphi(t) - f(st, rt) = 0. \quad (7)$$

Từ đây, ta dựng được một mở rộng $B_F = \{(b, s) \mid b \in B, s \in \text{Coker}d\}$ với hai phép toán $(b, s) + (b', r) = (b+b', s+r)$, $(b, s)(b', r) = (b\varphi(r) + \varphi(s)b' + g(s, r), sr)$.

Khi đó B_F thỏa mãn các tiên đề của vành nhờ các hệ thức trên. Hơn nữa, dãy sau khớp

$$E_F : \quad 0 \longrightarrow \text{Ker}d \xrightarrow{i'} B_F \xrightarrow{p'} D \longrightarrow 0$$

trong đó, $i'(a) = (a, 0)$, $p'(b, s) = x_s + db$.

Mở rộng này là một mở rộng của E-hệ chính qui bởi đồng cấu $\beta: B \rightarrow B_F, \beta(b) = (b, 0)$.

Do có Ann-hàm tử chính tắc $\Gamma: \text{Dis}D \rightarrow \mathbb{P}$ nên phần thứ nhất của định lý được chứng minh.

Bước 2: F và F' đồng luân khi và chỉ khi E_F và $E_{F'}$ là tương đẳng.

Giả sử $F, F': \text{Dis}D \rightarrow \mathbb{P}$ là hai Ann-hàm tử đồng luân, với đồng luân $\alpha: F \rightarrow F'$. Khi đó, theo định nghĩa của Ann-mũi tên, các biểu đồ sau giao hoán với mọi $x, y \in D$.

$$\begin{array}{ccc}
F_{x+y} & \xrightarrow{\tilde{F}_{x,y}} & F_x + F_y \\
\downarrow \alpha_{x+y} & & \downarrow \alpha_x + \alpha_y \\
F'_{x+y} & \xrightarrow{\tilde{F}'_{x,y}} & F'_x + F'_y
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
F_{xy} & \xrightarrow{\tilde{F}_{x,y}} & F_x F_y \\
\downarrow \alpha_{xy} & & \downarrow \alpha_x \otimes \alpha_y \\
F'_{xy} & \xrightarrow{\tilde{F}'_{x,y}} & F'_x F'_y
\end{array}$$

Theo định nghĩa phép toán $\otimes$ trên $\mathbb{P}$ ta có $\alpha_x \otimes \alpha_y = \alpha_x \alpha_y + (\theta_{F_x})\alpha_y + \alpha_x (\theta_{F_y})$.

Từ đó, ta có $\tilde{F}'_{x,y} - \tilde{F}_{x,y} = \alpha_x - \alpha_{x+y} + \alpha_y$, $\tilde{F}'_{x,y} - \tilde{F}_{x,y} = \alpha_x \alpha_y + \theta_x \alpha_y + \alpha_x \theta_{F_y} - \alpha_{xy}$. Suy ra $f'(x,y) - f(x,y) = \alpha_x - \alpha_{x+y} + \alpha_y$, $g'(x,y) - g(x,y) = \alpha_x \alpha_y + \theta_x \alpha_y + \alpha_x \theta_{F_y} - \alpha_{xy}$.

Trong $\mathbb{P}$, với hệ đại diện $(x_s, i_x), s \in \text{Coker}d$,

đặt $h(r,s) = f(x_s, x_r)$, $k(s,r) = g(x_s, x_r)$,

$\alpha_s^* = \alpha_{x_s}$, $\varphi_s = \theta_{F_{x_s}}$, ta thu được hệ thức

$$h'(s,r) - h(s,r) = \alpha_s^* - \alpha_{s+r} + \alpha_r^*, \quad (8)$$

$$k'(x,y) - k(x,y) = \alpha_s^* \alpha_r^* + \varphi_s \alpha_r^* + \alpha_s^* \varphi_r - \alpha_{sr}^*. \quad (9)$$

Bây giờ, đặt $\beta : B_F \rightarrow B_{F'}$, $(b,s) \mapsto (b + \alpha_s^*, s)$, thì β là một đồng cấu nhờ các hệ thức (8), (9). Hơn nữa, nó là một đẳng cấu làm cho các biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccccccc}
E_F : & 0 & \longrightarrow & \text{Ker}d & \xrightarrow{i'} & B_F & \xrightarrow{p'} & D & \longrightarrow & 0 \\
& & & \downarrow id & & \downarrow \beta & & \downarrow id & & \\
E_{F'} : & 0 & \longrightarrow & \text{Ker}d & \xrightarrow{i''} & B_{F'} & \xrightarrow{p''} & D & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

nghĩa là E_F và $E_{F'}$ là tương đẳng.

Bước 3: Chứng minh Δ là toàn ánh.

Giả sử ta có mở rộng E của E-hệ chính qui (B, D, d, θ) nghĩa là có dãy khớp

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\beta} B' \xrightarrow{p'} D \longrightarrow 0$$

cùng với đồng cấu $\beta : B \rightarrow B'$. Khi đó, tương tự Nhận xét 3.2 ii) ta có dãy khớp

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\beta} B' \xrightarrow{\bar{\gamma}} \text{Coker}d \longrightarrow 0$$

trong đó $\bar{\gamma} = \gamma p'$, và $\bar{\gamma} = \gamma p'$, $\gamma : D \rightarrow \text{Coker}d$ là toàn cấu chính tắc.

Bây giờ, trong B' ta chọn hệ đại diện $u_s, s \in \text{Coker}d$. Hệ đại diện này cảm sinh họ các hàm (φ, f, g) , nghĩa là đồng cấu $\varphi : D \rightarrow M_B$ được xác định bởi $\varphi_s(b) = u_s b$, $b\varphi_s = bu_s$, và các hàm $f, g : \text{Coker}d \times \text{Coker}d \rightarrow B$ thỏa mãn $u_s + u_r = f(s,r) + u_{s+r}$, $u_s u_r = g(s,r) + u_{sr}$.

Rõ ràng

$$f(0,r) = f(r,0) = 0, g(1,r) = g(s,1) = 0. \quad (10)$$

Tính kết hợp, tính giao hoán của phép cộng, tính kết hợp của phép nhân, tính phân phối của phép nhân và phép cộng trong B lần lượt cho ta các hệ thức (3)-(7).

Khi đó, ta xây dựng được Ann-hàm tử $F = (F, \tilde{F}, \tilde{F}') : \text{Dis}D \rightarrow \mathbb{P}$ bằng cách đặt

$$Fx = p'(u_{\gamma x}); \tilde{F}_{x,y} = f(\gamma x, \gamma y); \tilde{F}_{x,y} = g(\gamma x, \gamma y).$$

Các hệ thức (3)-(7), (10) chứng tỏ rằng $(F, \tilde{F}, \tilde{F})$ là một Ann-hàm tử giữa các Ann-phạm trù.

Định lý 3.10. *Tồn tại song ánh*

$$\text{Hom}_{(\gamma,0)}[\text{Dis}D, \mathbb{P}] \rightarrow H^2(\text{Coker}d, \text{Kerd}).$$

Chứng minh: Nếu $F = (F, \tilde{F}, \tilde{F}) : \text{Dis}D \rightarrow \mathbb{P}$ là một Ann-hàm tử cảm sinh cặp $(\gamma, 0)$ và $(G, \tilde{G}, \tilde{G})$ là Ann-hàm tử chính tắc thì Ann-hàm tử hợp thành

$$\left(\text{Dis}D \xrightarrow{(F, \tilde{F}, \tilde{F})} \mathbb{P} \xrightarrow{(G, \tilde{G}, \tilde{G})} \mathbb{S}_{\mathbb{P}} \right)$$

là $GF = (\gamma, 0, g_F)$, với $GF : (f, g) : D^2 \rightarrow \text{Kerd}$ là cặp hàm liên kết với (GF, GF) . Khi đó, $\gamma^*k = \partial(g_F)$. Theo Bổ đề 3.5, $k = \partial(f_F)$, với $f_F : (\text{Coker}d)^2 \rightarrow \text{Kerd}$.

Giả sử g_F cố định. Bây giờ, nếu $(K, \tilde{K}, \tilde{K}) : \text{Dis}D \rightarrow \mathbb{P}$ là một Ann-hàm tử cảm sinh cặp $(\gamma, 0)$ thì $\gamma^*k = \partial(g_K)$ và $k = \partial(f_K)$. Xét tương ứng $\Phi : [(K, \tilde{K}, \tilde{K})] \mapsto [f_F - f_K]$.

Trước hết, ta chứng tỏ tương ứng trên là một ánh xạ. Thật vậy, nếu $(K', \tilde{K}', \tilde{K}') : \text{Dis}D \rightarrow \mathbb{P}$ cũng là một Ann-hàm tử và $\alpha : K \rightarrow K'$ là một đồng luân thì (GK', GK') có cùng kiểu $(\gamma, 0)$ và $g_{K'} = g_K + \partial t$, trong đó $g_K, g_{K'}$ lần lượt là các cặp hàm liên kết với (GK, GK) , (GK', GK') .

Suy ra $[f_F - f_{K'}] = [f_F - f_K] \in H^2(\text{Coker}d, \text{Kerd})$. Hơn nữa, Φ là một đơn ánh. Cuối cùng, ta chứng minh Φ là toàn ánh. Thật vậy, giả sử f là một 2-đối chu trình tùy ý. Ta có $\partial(f_F - f) = \partial f_F - \partial f = \partial f = k$. Suy ra $\gamma^*k = \partial(g_F - g)$, với $g(x, y) = f(\gamma x, \gamma y)$. Khi đó, tồn tại một Ann-hàm tử $(K, \tilde{K}, \tilde{K}) : \text{Dis}D \rightarrow \mathbb{P}$ cảm sinh cặp $(\gamma, 0)$ và (GK, GK) liên kết với hàm $g_F - g$. Vậy Φ là toàn ánh.

3.5. Phân lớp các mở rộng kéo dài của mở rộng vành

Mỗi bộ ba (E, F, θ) của bài toán kéo dài mở rộng xác định một E-hệ chính qui $(B, \Pi', \lambda p, \theta)$. E-hệ này xác định một Ann-phạm trù chặt chẽ $\mathbb{P}$ mà Ann-phạm trù thu gọn của nó là $\mathbb{S}_{\mathbb{P}} = (\Pi_0, A, k)$, $\bar{k} \in H^3(\Pi_0, A)$. Mỗi mở rộng của E-hệ chính qui $(B, \Pi', \lambda p, \theta)$ là một kéo dài của mở rộng E .

Ký hiệu $\text{Ext}_{B \rightarrow \Pi'}(\Pi', A)$ là tập các lớp tương đẳng các mở rộng của E-hệ chính qui $(B, \Pi', \lambda p, \theta)$ thì theo Định lý 3.9, ta có một song ánh $\text{Hom}_{(\gamma,0)}[\text{Dis}D, \mathbb{P}] \leftrightarrow \text{Ext}_{B \rightarrow \Pi'}(\Pi', A)$.

Lại theo Định lý 3.10 ta có song ánh $\text{Hom}_{(\gamma,0)}[\text{Dis}D, \mathbb{P}] \leftrightarrow H^2(\Pi_0, A)$.

Do đó, ký hiệu $\text{Ext}(E, F, \theta)$ là tập các lớp tương đẳng các mở rộng kéo dài của mở rộng E thì ta thu được song ánh $\text{Ext}(E, F, \theta) \leftrightarrow H^2(\Pi_0, A)$.

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã chỉ ra rằng với mỗi dữ kiện (E, F, θ) của bài toán mở rộng vành cho trước, luôn tồn tại kéo dài của mở rộng E . Hơn nữa, tập các lớp tương đẳng các mở rộng kéo dài là tương ứng 1-1 với nhóm đối đồng điều chiều 2 của các vành. Kết quả này không chỉ là một hướng phát triển của bài toán mở rộng vành, mà còn làm phong phú thêm các ứng dụng của lý thuyết Ann-phạm trừ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] S. MacLane (1975), *Homology*, Springer - Verlage Berlin, Heidelberg, New York.
- [2] R. Brown, C. Spencer (1976), *G-groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group*, Proc. Konn. Ned. Akad. v. Wet., 79, 296-302.
- [3] A. M. Cegarra, J. M. Garccía - Calcines, J. A. Ortega (2002), *On graded categorical groups and equivariant group extensions*, Canad. J. Math., 54 (5) 970-997.
- [4] N. T. Quang, N. T. Thuy (2007), *Ring extension problem, Shukla cohomology and Ann-category*, arXiv:0706.0315 [math.CT].
- [5] N. T. Quang, P. T. Cuc (2012), *Crossed bimodules over rings and Shukla cohomology*, Math. Commun., 17(2) 575-598.
- [6] H. -J. Baues, T. Pirashvili (2004), *Shukla cohomology and additive track theories*, arXiv:0401158v1 [math.CT].
- [7] MacLane (1958), *Extensions and obstructions for rings*, Ill. J. Mathematics., 2, 316-345.
- [8] Nguyễn Tiến Quang (1998), *Ann-phạm trừ*, Luận án Tiến sĩ chuyên ngành Đại số và lý thuyết số, Trường Đại học sư phạm Hà Nội.
- [9] N. T. Quang, P. T. Cuc (2007), *$\mathbb{Z}$ -split ring extension problem, Ann-categories theory and Hoschild cohomology*, Journal of Science of Hanoi National University of Education Natural Sciences, 52(4) 3-12.
- [10] Phạm Thị Cúc (2014), *Hệ nhân tử trong nhóm phạm trừ phân bậc*, Luận án Tiến sĩ chuyên ngành Đại số và lý thuyết số, Trường Đại học Sư phạm Huế.
- [11] N. T. Quang, D. D. Hanh (2009), *Homological classification of Ann-functors*, East-West J. of Mathematics, 11(2) 195-210.
- [12] P. T. Cuc, N. T. Quang (2015), *Equivariant crossed modules and cohomology of groups with operators*, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 4(52) 1077-1095.

THE PROLONGATION PROBLEM OF RING EXTENSIONS

Pham Thi Cuc

ABSTRACT

In this paper, we first state the prolongation problem of ring extensions and show that its data (the triple (E, F, θ)) determines a regular E -system. Each extension of this regular E -system is a prolongation of the extension E . Next, we prove the result on the classification

of extensions of regular E -systems. Then, we obtain the result on the prolongation problem of a ring extension.

Keywords: Ann-categories, regular E -systems, prolongation of a ring extension.

* Ngày nộp bài: 23/3/2025; Ngày gửi phản biện: 11/4/2025; Ngày duyệt đăng: 25/9/2025

* Bài báo là kết quả nghiên cứu từ đề tài NCKH cấp sơ sở (mã số ĐT-2024-02) của Trường Đại học Hồng Đức.