p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

TÍNH CHẤP NHẬN ĐƯỢC CỦA LỚP HỆ 2D SUY BIẾN VỚI TRỄ HẰNG SỐ

Lê Huy Vũ[1], Bùi Trần Nam Anh[1]

TÓM TẮT

Trong nghiên cứu này, chúng tôi đã đề cập đến vấn đề ổn định của lớp hệ 2D suy biến kiểu Roesser có các trễ là hằng số. Trên cơ sở áp dụng phương pháp hàm Lyapunov-Krasovkii và kỹ thuật phương trình ma trận tự do kiểu 0 một điều kiện đủ phụ thuộc độ trễ đã được thiết lập nhằm đảm bảo hệ là chấp nhận được. Một ví dụ cũng đã được đưa ra để minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khoá: *Hệ 2D, hệ có trễ, hệ suy biến, sự ổn định.*

DOI: *https://doi.org/10.70117/hdujs.2.2024.747*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Gần đây, do các ứng dụng rộng rãi của chúng trong phân tích mạch, xử lý hình ảnh, truyền dữ liệu địa chấn hoặc lọc kỹ thuật số đa chiều, lý thuyết về hệ hai chiều (2D) đã thu hút nhiều sự quan tâm nghiên cứu của giới toán học và kỹ sư [3, 4, 13]. Hai mô hình mô tả hệ 2D được nghiên cứu phổ biến là mô hình Roersser [1, 9, 10] và mô hình Fornasini-Marchesini (FM) [2]. Các mô hình 2D này không độc lập nhau và có thể chuyển đổi qua lại lẫn nhau trong trường hợp hệ không có trễ và các đại lượng nhiễu. Tuy vậy, vấn đề gặp phải khi chuyển đổi mô hình là sự tăng đáng kể số chiều và đo đó dẫn đến việc gia tăng giá tính toán (computational cost) trong các mô hình ứng dụng. Liên quan đến các mô hình 2D này có rất nhiều nghiên cứu về tính định tính của chúng như vấn đề ổn định và ổn định hóa, ổn định mũ cho lớp hệ 2D [7, 8, 11–13]. Tuy nhiên, việc nghiên cứu các tính chất định tính của hệ 2D là tương đối phức tạp và khó khăn bởi vì chúng có những đặc thù riêng không thể áp dụng các phương pháp tương tự như hệ một chiều (1D). Đặc biệt, đối với các lớp hệ 2D suy biến thì việc nghiên cứu các tính chất định tính lại gặp nhiều khó khăn hơn. Hiện nay, rất hiếm các công trình nghiên cứu đề cập đến vấn đề ổn định của lớp hệ 2D suy biến.

Một số chú ý. Chúng ta ký hiệu là $\mathbb{Z}$ tập các số nguyên, $\mathbb{Z}^+$ là tập các số nguyên không âm, $l_2\left(\mathbb{Z}^+\right)=\left\{x:\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left\|x(i,j)\right\|^2<\infty\right\}, \mathbb{Z}[a,b]\triangleq\{a,a+1,...,b\}$ với $a,b\in\mathbb{Z}, a\le b. \mathbb{R}^{n\times m}$ là tập các ma trận thực cỡ $n\times m$ $m\times n$; với hai ma trận A, B có số chiều thích hợp, ta định nghĩa ma trận đường chéo của nó là $diag(A,B)\triangleq\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{bmatrix}$. Ma trận $M\in\mathbb{R}^{n\times m}$ là nửa nhóm xác định dương, ta ký hiệu $M\ge 0$ nếu $x^{\mathrm{T}}Mx\ge 0; \forall x\in\mathbb{R}^n; M$ được gọi là ma trận xác định dương, ký hiệu là $M>0$ nếu $x^{\mathrm{T}}Mx>0, \forall x\in\mathbb{R}^n, x\ne 0$.

[1] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức; Email: lehuyvu@hdu.edu.vn*

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Trong nghiên cứu này, chúng tôi sử dụng phương pháp hàm Lyapunov hay còn gọi là phương pháp thứ hai Lyapunov, kết hợp với các kỹ thuật đánh giá các bất đẳng thức ma trận để thiết lập một điều kiện đủ đảm bảo hệ suy biến 2D là chính quy, nhân quả và ổn định.

3. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Xét lớp hệ 2D suy biến với trễ hằng kiểu Roesser sau đây

$$E\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + A_\tau\begin{bmatrix} x^h(i-\tau_h,j) \\ x^v(i,j-\tau_v) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

với $i,j\in\mathbb{Z}^+, x^h(i,j)\in\mathbb{R}^{n_h}$ và $x^v(i,j)\in\mathbb{R}^{n_v}$ tương ứng là các véc tơ trạng thái ngang và dọc; các ma trận $E,A,A_\tau\in\mathbb{R}^{n\times n}\left(n=n_h+n_v\right)$ là các ma trận thực đã biết, trong đó E là ma trận suy biến có $rank(E)=\tau<n$ .Ta giả sử ma trận E có dạng $E=diag\left(E_h,E_v\right),E_h\in\mathbb{R}^{n_h\times n_h},E_v\in\mathbb{R}^{n_v\times n_v}$. τ_h,τ_v là các trễ hằng dọc theo các quỹ đạo ngang và dọc của hệ. Điều kiện ban đầu của (1) được cho bởi

$$x^h(k,j)=\phi(k,j),k\in\mathbb{Z}[-\tau_h,0],j\in\mathbb{Z}^+;\qquad x^v(i,l)=\psi(i,l),l\in\mathbb{Z}[-\tau_v,0],i\in\mathbb{Z}^+,$$

ở đó $\phi(k,.)\in l_2\left(\mathbb{Z}^+\right),\forall k\in\mathbb{Z}[-\tau_h,0];\psi(.,l)\in l_2\left(\mathbb{Z}^+\right),\forall l\in\mathbb{Z}[-\tau_v,0]$. Chúng ta đưa ra một số định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 3.1. Cặp ma trận (E,A) được gọi là chính quy nếu đa thức $\det\left[EI(z,w)-A\right]$ không đồng nhất bằng không, trong đó $I(z,w)=diag\left(zI_{n_h},wI_{n_v}\right)$ là ma trận đơn vị với số chiều $n\times n$. Cặp ma trận (E,A) được gọi là nhân quả nếu $\deg\left(\det(sE-A)\right)=rank(E)$.

Định nghĩa 3.2. Hệ (1) được gọi là ổn định nếu với bất kì điều kiện ban đầu (2) thỏa mãn

$$\lim_{q\to\infty}\ \sup\left\{\left\|\begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix}\right\| : i+j=q\right\}=0. \tag{3}$$

Định nghĩa 3.3. Hệ (1) được gọi là chấp nhận được nếu nó chính quy, nhân quả và ổn định.

Chú ý rằng tính chính quy và nhân quả của cặp ma trận (E,A) sẽ đảm bảo cho hệ (1) tồn tại và duy nhất nghiệm. Hơn nữa, khi $rank(E)=\tau<n$, luôn tồn tại hai ma trận không suy biến M,N sao cho.

$$\overline{E}=MEN=\begin{bmatrix} I_\tau & 0_{\tau\times(n-\tau)} \\ 0_{(n-\tau)\times\tau} & 0_{(n-\tau)\times(n-\tau)} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Khi đó, ta phân rã các ma trận A và A_τ như sau:

$$\overline{A}=MAN=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \overline{A_\tau}=MA_\tau N=\begin{bmatrix} A_{\tau 11} & A_{\tau 12} \\ A_{\tau 21} & A_{\tau 22} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Trên cơ sở các phân rã ma trận trong (4) và (5), ta có bổ đề sau đây.

 p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Bổ đề 3.4. *Hệ (1) là chính quy và nhân quả nếu ma trận A_{22} trong (5) là khả nghịch.*

Chứng minh. Ta ký hiệu các ma trận sau

$$M = M\begin{bmatrix} I_\tau & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0_{(n-\tau)\times\tau} & I_{n-\tau} \end{bmatrix}, N = N\begin{bmatrix} I_\tau & 0_{\tau\times(n-\tau)} \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Từ các phân ra (4) và (5), ta có

$$E = MEN = \begin{bmatrix} I_\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = MAN = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-\tau} \end{bmatrix},$$

ở đó $A_{11} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$. Từ đó suy ra, $\det\left[EI(z,w) - A\right]$ là không đồng nhất bằng không. Vì vậy, cặp ma trận (E, A) là chính quy. Thêm vào đó:

$$\det(sE - A) = \det\left(M^{-1}\right)\left(sE - A\right)N^{-1}\Big) = \det\left(M^{-1}\right)\det\left(N^{-1}\right)(-1)^{n-\tau}\det(sI_\tau - A_{11}).$$

Do đó, $\deg\left(\det(sE - A)\right) = rank(E)$, điều này suy tính nhân quả của cặp ma trận (E, A).

Ngoài ra, chúng tôi giới thiệu một số bổ đề cơ bản dùng trong chứng minh các định lý đưa ra.

Bổ đề 3.5. *(Bổ đề phần bù Schur). Với các ma trận bất kì $P = P^T, Q$ và ma trận đối xứng xác định dương R, ta có*

$$\begin{bmatrix} P & Q^T \\ R & -R \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow P + Q^T R^{-1} R < 0$$

Chứng minh. Chứng minh Bổ đề Schur dựa trên phân tích Schur sau

$$\begin{bmatrix} I_n & QR^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & Q \\ Q^T & -R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ R^{-1}Q^T & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P + QR^{-1}Q^T & 0 \\ 0 & -R \end{bmatrix}.$$

Bổ đề 3.6 ([9]). *Cho $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ n là ma trận đối xứng xác định dương, a, b là các số dương và hàm $x : \mathbb{Z}[i-a, i] \times [i, j-b] \to \mathbb{R}^n, i, j \in \mathbb{Z}^+$, khi đó ta có các bất đẳng thức sau*

$$\sum_{k=i-a}^{i-1} z_1^T(k,j) R z_1(k,j) \geq \frac{1}{a}\left[x(i,j) - x(i-a,j)\right]^T R\left[x(i,j) - x(i-a,j)\right],$$

$$\sum_{l=j-b}^{j-1} z_2^T(i,l) R z_2(i,l) \geq \frac{1}{b}\left[x(i,j) - x(i,j-b)\right]^T R\left[x(i,j) - x(i,j-b)\right].$$

ở đây $z_1(k,j) = x(k+1,j) - x(k,j)$ và $z_2(i,l) = x(i,l+1) - x(i,l)$.

4. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Bây giờ, chúng ta sẽ thiết kế một điều kiện dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMIs) đảm bảo rằng hệ (1) là chấp nhận được. Để cho thuận tiện, chúng ta định nghĩa ma trận khối chéo sau $I(a,b) = diag\left(aI_{n_h}, bI_{n_v}\right)$ với *a, b* là các số thực và kí hiệu các véc tơ sau:

$$x(i,j) = \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix}, x_1(i,j) = \begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix}, x_\tau(i,j) = \begin{bmatrix} x^h(i-\tau_h,j) \\ x^v(i,j-\tau_v) \end{bmatrix},$$

$$f^h(i,j) = x^h(i+1,j) - x^h(i,j), \quad f^v(i,j) = x^v(i,j+1) - x^v(i,j).$$

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Sau đây, chúng ta có định lí về tính chấp nhận được của hệ (1).

Định lý 4.1. Hệ (1) là chấp nhận được nếu tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương $P = diag\left(P^h, P^v\right)$, $Q = diag\left(Q^h, Q^v\right), R = diag\left(R^h, R^v\right)$, và các ma trận bất kỳ X_1, X_2 có số chiều thích hợp sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & A^T P & (A-E)^T \overline{R} \\ * & \Omega_{22} & A_\tau^T P & A_\tau^T \overline{R} \\ * & * & -P & 0 \\ * & * & * & -\overline{R} \end{bmatrix} < 0, \tag{6}$$

trong đó $\overline{R} = diag\left\{\tau_h^2 R^h, \tau_v^2 R^v\right\}, L = \left(E^T\right)^{\perp}$ *là ma trận trực giao của ma trận E và*

$$\Omega_{11} = -E^T PE - E^T RE + X_1 L^T A + A^T L X_1^T + Q,$$
$$\Omega_{12} = E^T RE + X_1 L^T A_\tau + A^T L X_2^T,\ \Omega_{22} = -Q - E^T RE + X_2 L^T A_\tau + A_\tau^T L X_2^T.$$

Chứng minh. Với *M*, *N* là các ma trận không suy biến thỏa mãn (4). Khi đó, từ $N^T E^T = EM^{-T}$ chúng ta có thể viết ma trận $L \triangleq \left(E^T\right)^{\perp}$ có dạng sau $L = M^T \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix}$. Ta ký hiệu các ma trận sau

$$X_1 = N^T X_1 = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{bmatrix}, P = M^{-T} P M^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, R = M^{-T} M^{-1} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

Từ (6), chúng ta có thể thấy rằng $\Omega_{11} < 0$. Bởi vì *Q* là ma trận đối xứng xác định dương nên suy ra

$$-E^T PE - E^T RE + X_1 L^T A + A^T L X_1^T < 0 \tag{8}$$

Nhân vào bên trái của (8) với ma trận N^T và bên phải của (8) với các ma trận *N*, chúng ta có

$$\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \triangleq -\overline{E}^T R\overline{E} - \overline{E}^T P\overline{E} + X_1 \begin{bmatrix} 0 & G^T \end{bmatrix} \overline{A} + \overline{A}^T \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} X_1^T < 0, \tag{9}$$

ở đây

$$\Delta_{11} = -R_{11} - P_{11} + X_{11} G^T A_{21} + A_{21}^T G X_{11}^T,\ \Delta_{12} = X_{11} G^T A_{22} + A_{21}^T G X_{21}^T,\ \Delta_{22} = X_{21} G^T A_{22} + A_{22}^T G X_{21}^T.$$

Từ bất đẳng thức ma trận trong (9) suy ra rằng $X_{21} G^T A_{22} + A_{22}^T G X_{22}^T < 0$.

Điều này chứng tỏ rằng ma trận A_{22} là không suy biến. Theo Bổ đề 2.4 ta có hệ (1) là chính quy và nhân quả.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh hệ (1) là ổn định. Xét hàm Lyapunov-Krasovskii sau

$$V(i,j) \triangleq V\left(x^h(i,j), x^v(i,j)\right) = \underbrace{\sum_{k=1}^{3} V_k^h\left(x^h(i,j)\right)}_{V^h(i,j)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{3} V_h^v\left(x^v(i,j)\right)}_{V^v(i,j)},$$

ở đó

$$V_1^h\left(x^h(i,j)\right) = x^{hT}(i,j)E_h^T P^h E_h x^h(i,j),\ V_2^h\left(x^h(i,j)\right) = \sum_{l=i-\tau_h}^{i-1} x^{hT}(l,j)Q^h x^h(l,j),$$

$$V_3^h\left(x^h(i,j)\right) = \tau_h \sum_{k=-\tau_h}^{-1}\sum_{l=i+k}^{i-1} f^{hT}(l,j)E_h^T R^h E_h f^h(l,j), V_1^v\left(x^v(i,j)\right) = x^{vT}(i,j)E_v^T P^v E_v x^v(i,j),$$

$$V_2^v\left(x^v(i,j)\right) = \sum_{l=i-\tau_h}^{j-1} x^{vT}(i,j)Q^v x^v(i,l), V_3^v(x^v(i,j)) = \tau_v \sum_{k=-\tau_v}^{-1}\sum_{l=j+k}^{j-1} f^{v\top}(i,l)E_v^\top R^v E_v f^v(i,l).$$

Tính sai phân $\Delta V(i,j)$ dọc theo quỹ đạo nghiệm của hệ (1) như sau

$$\Delta V(i,j) \triangleq \underbrace{V^h(i+1,j) - V^h(i,j)}_{\Delta V^h(i,j)} + \underbrace{V^v(i,j+1) - V^v(i,j)}_{\Delta V^v(i,j)}.$$

Trước hết, sai phân của các hàm $V^h(x^h(i,j))$ được cho bởi

$$\Delta V_1^h(x^h(i,j)) = x^{h\top}(i+1,j)E_h^\top P^h E_h x(i+1,j) - x^{h\top}(i,j)E_h^\top P^h E_h x^h(i,j) \tag{10}$$

$$\Delta V_2^h(x^h(i,j)) = x^{h\top}(i,j)Q^h x(i,j) - x^{h\top}(i-\tau_h,j)Q^h x^h(i-\tau_h,j) \tag{11}$$

$$\Delta V_3^h(x^h(i,j)) = \tau_h^2 f^{h\top}(i,j)E_h^\top R^h E_h f(i,j) - \tau_h \sum_{l=i-\tau_h}^{j-1} f^{h\top}(i,l)E_h^\top R^h E_h f^h(i,l) \tag{12}$$

Tương tự, sai phân của các hàm $V^v(x^v(i,j))$ là

$$\Delta V_1^v(x^v(i,j)) = x^{v\top}(i+1,j)E_v^\top P^v E_v x(i+1,j) - x^{v\top}(i,j)E_v^\top P^v E_v x(i,j) \tag{13}$$

$$\Delta V_2^v(x^v(i,j)) = x^{v\top}(i,j)Q^v x(i,j) - x^{v\top}(i-\tau_v,j)Q^v x^v(i-\tau_v,j) \tag{14}$$

$$\Delta V_3^v(x^v(i,j)) = \tau_v^2 f^{v\top}(i,j)E_v^\top R^v E_v f(i,j) - \tau_v \sum_{l=i-\tau_v}^{j-1} f^{v\top}(i,l)E_v^\top R^v E_v f^v(i,l) \tag{15}$$

Sử dụng bổ đề 2.6 chúng ta có các đánh giá sau

$$-\tau_h \sum_{l=i-\tau_h}^{i-1} f^{h\top}(l,j)E_h^\top R^h E_h f^h(l,j) \le -[x^h(i,j) - x^h(i-\tau_h,j)]^\top (E_h^\top R^h E_h)[x^h(i,j) - x^h(i-\tau_h,j)] \tag{16}$$

$$= \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^h(i-\tau_h,j) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -E_h^\top R^h E_h & E_h^\top R^h E_h \\ * & -E_h^\top R^h E_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^h(i-\tau_h,j) \end{bmatrix}$$

Tương tự

$$-\tau_v \sum_{l=j-\tau_v}^{j-1} f^{v\top}(i,l)E_v^\top R^v E_v f^v(i,l) \le \begin{bmatrix} x^v(i,j) \\ x^v(i,j-\tau_v) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} -E_v^\top R^v E_v & E_v^\top R^v E_v \\ * & -E_v^\top R^v E_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^v(i,j) \\ x^v(i,j-\tau_v) \end{bmatrix} \tag{17}$$

Kết hợp các phương trình từ (10) đến (17), chúng ta có

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

$$\sum_{k=1}^{3}\left[\Delta V_k^h(x^h(i,j))+\Delta V_k^v(x^v(i,j))\right]\le x_1^\top(i,j)E^\top PEx_1(i,j)-x^\top(i,j)E^\top PEx(i,j)$$
$$+x^\top(i,j)Qx(i,j)-x_\tau^\top(i,j)Qx_\tau(i,j)+f^\top\bar{R}Ef(i,j)$$
$$+\begin{bmatrix}x(i,j)\\x_\tau(i,j)\end{bmatrix}^\top\begin{bmatrix}-E^\top RE & E^\top RE\\ * & -E^\top RE\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(i,j)\\x_\tau(i,j)\end{bmatrix} \tag{18}$$

Ngoài ra, từ phương trình (1) của hệ, ta suy ra:

$Ex_1(i,j)=\begin{bmatrix}A & A_\tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(i,j)\\x_\tau(i,j)\end{bmatrix}$. Do đó,

$$x_1^\top(i,j)E^\top PE^\top x_1(i,j)=\begin{bmatrix}x^\top(i,j) & x_\tau^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^\top\\A_\tau^\top\end{bmatrix}P\begin{bmatrix}A & A_\tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(i,j)\\x_\tau(i,j)\end{bmatrix} \tag{19}$$

Hơn nữa, chúng ta có:

$$z^\top(i,j)E^\top\bar{R}Ez(i,j)=[Ex(i+1,j+1)-Ex(i,j)]^\top\bar{R}[Ex(i+1,j+1)-Ex(i,j)]^\top$$
$$=[(A-E)x(i,j)+A_\tau x_\tau(i,j)^\top\bar{R}[(A-E)x(i,j)+A_\tau x_\tau(i,j)]$$
$$=\begin{bmatrix}x^\top(i,j) & x_\tau^\top(i,j)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(A-E)^\top\\A_\tau^\top\end{bmatrix}\bar{R}\begin{bmatrix}(A-E) & A_\tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(i,j)\\x_\tau(i,j)\end{bmatrix} \tag{20}$$

Mặt khác, chúng ta có $(E^\top)L=0$ hay $L=(E^\top)^\perp$. Do đó , với bất kì các ma trận X_1, X_2 có số chiều thích hợp, các phương trình sau được thoải mãn:

$$2[x^\top(i,j)X_1L^\top+x_\tau^\top(i,j)X_2L^\top]Ex_1(i,j)=0 \tag{21}$$

Thay (1) vào (21) , ta được:

$$2[x^\top(i,j)X_1L^\top+x_\tau^\top(i,j)X_2L^\top]\begin{bmatrix}A & A_\tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(i,j)\\x_\tau(i,j)\end{bmatrix}=0 \tag{22}$$

Từ (18), (19), (20) và (22), ta có thể thu được kết quả sau:

$$\Delta V(x(i,j))=\sum_{k=1}^{3}(\Delta V_k^h(x^h(i,j))+\Delta v_k^v(x^v(i,j)))$$
$$\le\begin{bmatrix}x(i,j)\\x_\tau(i,j)\end{bmatrix}^\top\begin{bmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ * & \Omega_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(i,j)\\x_\tau(i,j)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x(i,j)\\x_\tau(i,j)\end{bmatrix}^\top\begin{bmatrix}A^\top\\A_\tau^\top\end{bmatrix}P\begin{bmatrix}A & A_\tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(i,j)\\x_\tau(i,j)\end{bmatrix} \tag{23}$$
$$+\begin{bmatrix}x(i,j)\\x_\tau(i,j)\end{bmatrix}^\top\begin{bmatrix}(A-E)^\top\\A_\tau^\top\end{bmatrix}\bar{R}\begin{bmatrix}(A-E) & A_\tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(i,j)\\x_\tau(i,j),\end{bmatrix},$$

trong đó

$\Omega_{11}=-E^\top PE-E^\top RE+X_1L^\top A+A^\top LX_1^\top+Q, \Omega_{12}=E^\top RE+X_1L^\top A_\tau+A^\top LX_2^\top,$

và ma trận $\Omega_{22}=-Q-E^\top RE+X_2L^\top A_\tau+A^\top LX_2^\top$.

Bởi Bổ đề 3.5, ta có $\begin{bmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ * & \Omega_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A^\top\\A_\tau^\top\end{bmatrix}P\begin{bmatrix}A & A_\tau\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(A-E)^\top\\A_\tau^\top\end{bmatrix}\bar{R}\begin{bmatrix}(A-E) & A_\tau\end{bmatrix}<0$

nếu và chỉ nếu

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & A^\top P & (A-E)^\top \bar{R} \\ * & \Omega_{22} & A_\tau^\top P & A_\tau^\top \bar{R} \\ * & * & -P & 0 \\ * & * & * & -\bar{R} \end{bmatrix} < 0.$$

Do đó, nếu bất đẳng thức (6) thỏa mãn thì từ (23), tồn tại số dương κ sao cho

$$\Delta V(i,j) = \Delta V^h(i,j) + \Delta V^v(i,j) \le -\kappa \| x(i,j) \|^2, \quad i,j \in \mathbb{Z}^+ \tag{24}$$

Bây giờ, với bất kỳ số nguyên dương S, đặt $E(S) = \sum_{(i,j)\in\Gamma(S)} V(i,j)$ được gọi là phiếm hàm năng lượng của hàm $V(i,j)$ dọc theo đường thẳng $\Gamma(S) = (i,j) : i+j = S, i \ge 0, j \ge 0$. Khi đó, từ (24), ta có:

$$\begin{aligned}
&\sum_{(i,j)\in\Gamma(S+1)} V(i,j) = \sum_{(i,j)\in\Gamma(S+1)} (V^h(i,j) + V^v(i,j)) \\
&= V^h(1,S) + V^h(2,S-1) + \ldots + V^h(S+1,0) + V^v(S,1) + V^v(S-1,2) + \ldots + V^v(0,S+1) \\
&\le V^h(0,S) + V^h(1,S-1) + \ldots + V^h(S,0) + V^v(S,0) + V^v(S-1,1) + \ldots + V^v(0,S) - \kappa \sum_{(i,j)\in\Gamma(S)} \| x(i,j) \|^2 \\
&= \sum_{(i,j)\in\Gamma(S)} (V^h(i,j) + V^v(i,j)) - \kappa \sum_{(i,j)\in\Gamma(S)} \| x(i,j) \|^2 .
\end{aligned}$$

Do đó

$$E(S+1) \le E(S) - \kappa \sum_{(i,j)\in\Gamma(S)} \| x(i,j) \|^2 . \tag{25}$$

Từ (25), $E(S)$ là một dãy giảm không âm. Do đó, nó có giới hạn và ta đặt giới hạn đó là $E(\infty) = \lim_{S\to\infty} E(S)$.

Thêm vào đó,

$$\kappa \sum_{(i,j)\in\Gamma(S)} \| x(i,j) \|^2 \le E(S) - E(S+1) \to E(\infty) - E(\infty) = 0 \text{ khi } q \to \infty,$$

điều này chứng tỏ rằng hệ (1) là ổn định. Do đó hệ (1) là chấp nhận được. Định lý được chứng minh.

Chú ý 4.2. Khi $A_\tau = 0$ hệ (1) trở thành hệ $2D$ suy biến không có trễ. Trong trường hợp này, trong hàm Lyapunov ta bỏ đi hàm $V_2(i,j)$ và $V_3(i,j)$, ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 4.3. *Hệ* (1) *với* $A_\tau = 0$ *là chấp nhận được nếu tồn tại ma trận đối xứng xác định dương* $P = diag(P^h, P^v)$, *và ma trận bất kì* $X \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$, *sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau thoả mãn.*

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & A^\top P \\ * & -P \end{bmatrix} < 0, \tag{26}$$

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

ở đây $\Pi_{11} = -E^\top PE + XL^\top A + A^\top LX^\top$ *và* $L = (E^\top)^\perp$ *là ma trận trực giao của ma trận* E *.*

Chú ý 4.4. Trong trường hợp ma trận $E = I$ là ma trận đơn vị thì hệ (1) trở thành hệ $2D$ không suy biến có trễ sau

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + A_\tau \begin{bmatrix} x^h(i-\tau_h,j) \\ x^v(i,j-\tau_v) \end{bmatrix} \tag{27}$$

Khi đó, bằng các bước tương tự như trong chứng minh Định lý 4.1 nhưng bỏ đi các biến X_1, X_2 trong (21), chúng ta dễ dàng thu được một điều kiện để hệ (27) là ổn định sau đây:

Hệ quả 4.5. *Hệ (27) là ổn định nếu tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương* $P = diag(P^h, P^v)$, $Q = diag(Q^h, Q^v)$, $R = diag(R^h, R^v)$ *có số chiều thích hợp sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau được thỏa mãn:*

$$\begin{bmatrix} -P-R+Q & R & A^T P & (A-I)^T \operatorname{diag}\{\tau_h^2 R^h, \tau_v^2 R^v\} \\ * & -Q-R & A_\tau^T P & A_\tau^T \operatorname{diag}\{\tau_h^2 R^h, \tau_v^2 R^v\} \\ * & * & -P & 0 \\ * & * & * & -\operatorname{diag}\{\tau_h^2 R^h, \tau_v^2 R^v\} \end{bmatrix} < 0. \tag{28}$$

5. VÍ DỤ MINH HỌA

Trong mục này, chúng tôi sẽ đưa ra một số ví dụ minh họa cho kết quả đạt được. Xét hệ $2D$ suy biến (1) với cá ma trận có mặt trong phương trình như sau

$$E = \begin{bmatrix} E_h & 0 \\ 0 & E_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_\tau = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.16 & 0.36 \\ 0.25 & 0.31 & -0.01 \\ 0.19 & 0.05 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.03 & 0.48 & 0.36 \\ 0.2 & 0.12 & 0.15 \\ 0.05 & -0.05 & 2.5 \end{bmatrix}, \quad A_\tau = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.16 & 0.36 \\ 0.25 & 0.31 & -0.01 \\ 0.19 & 0.05 & 0.01 \end{bmatrix}$$

Và các trễ $\tau_h = \tau_v = 5$. Khi đó, bằng công cụ giải bất đẳng thức ma trận tuyến tính của Matlab, giải (6) chúng ta tìm được các ma trận đối xứng xác định dương sau

$$P = \begin{bmatrix} 1.5936 & 0 & 0 \\ 0 & 2.2029 & -0.1198 \\ 0 & -0.1198 & 0.2972 \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} 0.8068 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9187 & 0.0513 \\ 0 & 0.0513 & 1.4759 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0.0131 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0243 & -0.0026 \\ 0 & -0.0026 & 0.0107 \end{bmatrix}$$

và các ma trận sau

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.0211 \\ -0.1529 \\ -1.0852 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -0.0083 \\ -0.0397 \\ -0.0786 \end{bmatrix}.$$

 p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Vậy theo Định lý 3.1 hệ (1) là chấp nhận được.

6. KẾT LUẬN

Bằng cách sử dụng phương pháp hàm Lyapunov-Krasovkii kết hợp với phương trình ma trận tự do kiểu 0 và sử dụng một số bất đẳng thức tổng, một điều kiện đủ đã được đưa ra để đảm bảo hệ là chấp nhận được-tức là hệ là chính quy, nhân quả và ổn định. Kết quả của bài báo còn được minh họa bởi một ví dụ số nhằm khẳng định tính đúng hiệu quả, chính xác mà phương pháp đã đưa ra trong bài báo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] R.P. Roessoer (1975), *A discrete state-space model for linear image processing*, IEEE Transactions on Automatic Control, 20(1), 1-10.

[2] E. Fornasini, G. Marchesini (1978), *Doubly indexed dynamical systems, state-space models and structural properties*, Theory of Computing Systems, 12, 59-72.

[3] T. Kaczorek (1985), *Two-Dimensional Linear Systems*, Springer-Verlag, Berlin, Germany.

[4] W.S. Lu (1992), *Two-Dimensional Digital Filters*, Marcel Dekker Inc, New York, NY.

[5] L. Dai (1989), *Singular Control Systems-Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, Berlin.

[6] C.H. Fang, L. Lee, F.R. Chang (1994), *Robust control and design for discrete-time singular systems*, Automatica 30(11), 1741-1750.

[7] S.F. Chen (2015), *Stability analysis and stabilization of 2-D singular Roesser models*, Applied Mathematics and Computation 250, 779-791.

[8] S. Huang, Z. Xiang (2013), *Delay-dependent stability for discrete 2D switched systems with state delays in the Roesser model*, Circuit. Syst. Signal Process., 32, 2821-2837..

[9] L.V. Hien, H. Trinh (2016), *Stability of two-dimensional Roesser systems with time-varying delays via novel 2D finite-sum inequalities*, IET Control Theory Appl., 10, 1665-1674.

[10] I. Ghous, Z. Xiang (2015), H_∞ *stabilization of* $2D$ *discrete switched delayed systems represented by the Roesser model subject to actuator saturation*, Trans. Inst. Meas. Control, 37, 1242-1253.

[11] Z. Fei, S. Shi, C. Zhao, L. Wu (2017), *Asynchronous control for* $2D$ *switched systems with mode-dependent average dwell time*, Automatica, 79, 198-206.

[12] L. V. Hien, H. Trinh (2017), *Exponential stability of two-dimensional homogeneous monotone systems withbounded directional delays*, IEEE Trans. Autom. Control, 63, 2694-2700.

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

[13] L.V. Hien LV, H. T rinh, N.T, Lan Huong (2019), *Delay-dependent energy-to-peak stability of* $2D$ *time-delay Roesser systems with multiplicative stochastic noises*, IEEE Trans. Autom. Control, 64, 5066-5073.

ACCEPTABILITY OF 2D SINGULAR SYSTEMS WITH CONSTANT DELAY

Le Huy Vu, Bui Tran Nam Anh

ABSTRACT

This study considers the problem of admissibility analysis of two-dimensional (2D) singular systems with delays. Based on a Lyapunov–Krasovskii functional, and by utilizing zero-type free matrix equations, sufficient conditions in the form of linear matrix inequalities (LMIs) are derived to guarantee the admissibility of 2D singular systems. The effectiveness of the obtained results is demonstrated by one numerical example.

Keywords: *2D systems, Time-delay systems, singular systems, stability.*

** Ngày nộp bài: 03/4/2024; Ngày gửi phản biện: 10/4/2024; Ngày duyệt đăng: 15/11/2024*

.