p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

# MÔ HÌNH BÀI TOÁN RỜI RẠC XẤP XỈ PHƯƠNG TRÌNH NAVIER-STOKES BẬC PHÂN

**Phạm Thị Vân[1], Lê Trần Tình[2], Lê Thị Mai[3]**

TÓM TẮT

*Nội dung của bài báo này tập trung trình bày xây dựng mô hình bài toán rời rạc xấp xỉ phương trình Navier-Stokes bậc phân trong xuyến ba chiều và sự tồn tại nghiệm Leray-Hopf của mô hình bài toán thu được. Các kết quả đạt được là sự mở rộng và phát triển các kết quả hiện có đối với vấn đề được nghiên cứu.*

**Từ khoá:** *Phương trình Navier-Stokes bậc phân, nghiệm Leray-Hopf.*

**DOI:** *https://doi.org/10.70117/hdujs.2.2024.746*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Qua nhiều thập kỷ, chúng ta đã thấy được nhiều đóng góp của nhiều nhà khoa học trên thế giới cho việc nghiên cứu các vấn đề về phương trình Navier-Stokes. Tuy nhiên, rất nhiều vấn đề mở vẫn còn tồn tại và cần được nghiên cứu như sự tồn tại nghiệm cổ điển của phương trình Navier-Stokes trong trường hợp ba chiều. Khi nghiên cứu các chuyển động hỗn loạn của chất lỏng thì các mô hình chứa toán tử bậc phân là đối tượng tiềm năng và hiện nay chúng nhận được nhiều sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước. Tất nhiên, các mô hình này cũng tồn tại các vấn đề mở như phương trình Navier-Stokes [7]. Một hướng tiếp cận để hiểu thêm về phương trình Navier-Stokes và các khó khăn gặp phải là nghiên cứu các mô hình bài toán rời rạc. Nhiều mô hình bài toán rời rạc được đề xuất và nghiên cứu bằng một cách phù hợp nào đó. Gần đây, M. Dai đã sử dụng công cụ phân rã Littlewood-Paley để xây dựng các mô hình bài toán rời rạc đối với phương trình được nghiên cứu. Kết quả nhận được rất khả quan vì mô hình bài toán rời rạc nhận được vẫn giữ được các tính chất quan trọng của nghiệm như bài toán ban đầu và mô hình bài toán này đóng vai trò như là mô hình tổng quát chứa đựng các mô hình nghiên cứu trước đó [3].

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ sử dụng hướng tiếp cận của M. Dai để xây dựng một mô hình bài toán rời rạc tổng quát cho phương trình (2.1). Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm Leray-Hopf của mô hình bài toán thu được. Cấu trúc bài báo như sau: Phần 1: Đặt vấn đề; Phần 2: Kiến thức chuẩn bị; Phần 3: Mô hình bài toán rời rạc xấp xỉ phương trình Navier-Stokes bậc phân trong xuyến ba chiều. Cuối cùng là danh sách các tài liệu tham khảo được sử dụng. Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng ký hiệu $A \lesssim B$ nghĩa là tồn tai số dương $c$ nào đó thoả mãn $A \le cB$ và $A \sim B$ nghĩa là tồn tai số không âm $c_1, c_2$ thoả mãn $c_1 B \le A \le c_2 B$ hoặc $c_1 A \le B \le c_2 A$.

[1] *Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Sĩ quan Đặc công*

[2] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức; Email: letrantinh@hdu.edu.vn*

[3] *Học viên Cao học lớp K15 Toán Giải tích, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

## 2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Nội dung phần này nhằm mục đích tóm lược một số kết quả quan trọng về bài toán được xét trong bài báo bao gồm tính đặt chỉnh của phương trình Navier-Stokes bậc phân trong xuyến ba chiều và phân rã Littlewood-Paley đối với hàm tuần hoàn. Kết quả phần này sẽ phục vụ cho việc nghiên cứu các nội dung tiếp theo.

### 2.1. Phương trình Navier-Stokes bậc phân trong xuyến ba chiều

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ xem xét phương trình Navier-Stokes bậc phân trong xuyến ba chiều $\mathbb{T}=[-\pi,\pi]^3$ dạng

$$\begin{cases}\partial_t u+\nu(-\Delta)^\alpha u+(u\cdot\nabla)u+\lambda u+\nabla p=f\\ \nabla\cdot u=0\end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó $u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t))$ là véctơ vận tốc của chất lỏng; $p=p(x,t)$ là áp lực; $\nu>0$ là hệ số nhớt; $\lambda\geq 0$; $f(x,t)$ là ngoại và $(-\Delta)^\alpha$ là toán tử Laplace bậc phân thứ. Phương trình (2.1) được xét với điều kiện biên tuần hoàn. Khi đó, chúng ta có thể giới hạn việc giải quyết bài toán với điều kiện ban đầu và $f$ có trung bình bằng không và nghiệm của bài toán biên với điều kiện ban đầu tương ứng sẽ có tính chất tương tự. Điều này cho phép chúng ta nghiên cứu bài toán véctơ vận tốc $u$ là hàm tuần hoàn có trung bình bằng không xác định như sau:

$$u:=\sum_{k\in J}u_k\phi_k \quad \text{với} \quad u_k\in\mathbb{C}^3, u_k^*=u_{-k}, u_k\cdot k=0\ \forall k\in J,$$

trong đó $\phi_k=e^{ik\cdot x}$, $J=\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}$.

Chúng ta định nghĩa các không gian Hilbert, với $s\in\mathbb{R}$,

$$V^s:=\left\{u:=\sum_{k\in J}u_k\phi_k,\ u_k\in\mathbb{C}^3, u_k^*=u_{-k}, u_k\cdot k=0, \phi_k=e^{ik.x} \text{ và } \sum_{k\in J}\left|u_k\right|^2|k|^{2s}<\infty\right\},$$

với tích vô hướng

$$\langle u,v\rangle_{V^n}=\sum_{k\in J}u_k\cdot v_{-k}\left|k\right|^{2s}.$$

Chúng ta sẽ sử dụng ký hiệu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ là tích vô hướng trong $V^0$ và tích đối ngẫu của $V^s-V^{-s}$ được xác định như sau $\langle u,v\rangle:=\sum_{k\in J}u_k\cdot v_{-k}$.

Chúng ta định nghĩa toán tử $\Lambda=(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ xác định bởi

$$\Lambda u=\sum_{k\in J}\left|k\right|u_k\phi_k \quad \text{với} \quad u=\sum_{k\in J}u_k\phi_k, \phi_k=e^{ik.x},$$

và toán tử $\Lambda^s$ xác định bởi

$$\Lambda^s u=\sum_{k\in J}\left|k\right|^s u_k\phi_k.$$

Khi đó, $(-\Delta)^s=\Lambda^{2s}$ và $\Lambda^s$ bảo toàn điều kiện không nén được $k\cdot u_k=0$.

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Ký hiệu $P_\sigma$ là phép chiếu Leray-Helmholtz từ $L^2(\mathbb{T})$ vào $V^0$ và $P_\sigma \Lambda^s = \Lambda^s P_\sigma$. Đặt

$$b(u,v,w) = \int_{\mathbb{T}} \sum_{i,j=1}^{3} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx.$$

Sử dụng phép chiếu Leray-Helmholtz, phương trình (2.1) được viết lại dưới dạng

$$\partial_t u + \nu \Lambda^{2\alpha} u + B(u,u) + \lambda u = P_\sigma f, \tag{2.2}$$

trong đó $B(u,v) := P_\sigma \{(u \cdot \nabla) v\}$.

Chúng tôi nhắc lại kết quả đạt được về sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của (2.2) với dữ kiện ban đầu $u_\tau$ trong $L^2$ như sau (tham khảo [6, 7])

**Định nghĩa 2.1.** Giả sử $\nu$, $\alpha$ là các số thực dương, $\lambda \geq 0$, $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; V^0)$ và $u_\tau \in V^0$. Nghiệm yếu của (2.2) trên khoảng $[\tau, \infty)$ là hàm $u(x,t)$ sao cho

$$u \in L^\infty_{loc}(\tau, \infty; V^0) \cap L^2_{loc}(\tau, \infty; V^\alpha) \cap C_w([\tau, \infty); V^0),$$

và với mọi $t > \tau$, $v \in V^\gamma$, $\gamma = \max\left\{\frac{5}{2} - \alpha; \alpha\right\}$, $u(x,t)$ thỏa mãn $u(\tau) = u_\tau$ và

$$\langle u(t), v\rangle + \nu \int_\tau^t \langle \Lambda^\alpha u(s), \Lambda^\alpha v\rangle ds - \int_\tau^t \langle B(u(s), v), u(s)\rangle ds$$
$$+ \lambda \int_\tau^t \langle u(s), v\rangle ds = \langle u_\tau, v\rangle + \int_\tau^t \langle f(s), v\rangle ds.$$

**Định lý 2.2.** *Giả sử $\nu$, $\alpha$ là các số thực dương, $\lambda \geq 0$, $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; V^0)$ và $u_\tau \in V^0$. Khi đó, (2.2) có nghiệm yếu toàn cục thoả mãn Định nghĩa (2.1) với điều kiện ban đầu $u_\tau$. Hơn nữa, nếu $\alpha \geq \frac{5}{4}$ thì nghiệm yếu toàn cục là duy nhất và phụ thuộc vào tính liên tục của dữ kiện ban đầu.*

### 2.2. Phân rã Littlewood-Paley đối với hàm tuần hoàn

Nội dung mục này trình bày về phân rã Littlewood-Paley đối với hàm tuần hoàn. Do tính chất hội tụ của chuỗi hữu hạn khi cắt từ chuỗi Fourier, chuỗi hữu hạn (the square-cutoff Fourier series) được xây dựng như sau [2]

$$S_N f(x) := \sum_{|k_j| \leq N,\, j=1,2,3} \hat{f}(k) e^{ik\cdot x} = D_N * f, \tag{2.3}$$

trong đó $D_N$ là nhân Dirichlet được xác định bởi công thức

$$D_N := \sum_{|k_j| \leq N,\, j=1,2,3} e^{ik\cdot x} \quad \text{và} \quad \hat{f}(k) := \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ik\cdot x} dx.$$

Tổng riêng (2.3) là bị chặn trên $L^p$ với $1 < p < \infty$ và hội tụ về hàm $f$ ban đầu trong $L^p$. Các kết quả này được tóm tắt trong bổ đề sau đây [2, 4, 5].

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

**Bổ đề 2.3.** *Giả sử $f \in L^p(\mathbb{T})$ và $1 < p < \infty$. Tổng riêng $S_N f$ được xác định bởi (2.3) thoả mãn*

$$\| S_N f \|_{L^p(\mathbb{T})} \le C_p \| f \|_{L^p(\mathbb{T})},$$

*và*
$$\| S_N f - f \|_{L^p(\mathbb{T})} \to 0 \text{ as } N \to \infty.$$

*Hơn nữa, nếu $f \in L^p(\mathbb{T})$ và $1 < p \le \infty$, thì $S_N f \to f$ hầu khắp nơi khi $N \to \infty$.*

Với số nguyên $j \ge 0$, ta đặt $A_j$ là tập hợp điểm thoả mãn

$$A_j = \{k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3 : |k_m| \le 2^j, m = 1, 2, 3\}.$$

Ta định nghĩa các phép chiếu Fourier như sau

$$\Delta_0 f(x) = \sum_{k \in A_0} \hat{f}(k) e^{ik\cdot x}, \tag{2.4}$$

$$\Delta_j f(x) = \sum_{k \in A_j \setminus A_{j-1}} \hat{f}(k) e^{ik\cdot x}, \; j \ge 1, \; j \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Để thuận tiện về mặt kí hiệu, ta quy ước $\Delta_j = 0$ khi $j < 0$. Khi đó, ta định nghĩa

$$S_j f(x) = \sum_{m=0}^{j} \Delta_m f(x) = \sum_{k \in A_j} \hat{f}(k) e^{ik\cdot x}. \tag{2.6}$$

và ta có thể sử dụng phân rã Littlewood-Paley cho mọi hàm $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 < p \le \infty$, như sau

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \Delta_m f(x).$$

Bổ đề sau đây trình bày các tính chất cơ bản của toán tử $\Delta_j$ và $S_j$.

**Bổ đề 2.4.** *Cho $j \ge 0$ là một số nguyên. Giả sử $\Delta_j$ và $S_j$ được xác định bởi (2.4), (2.5) và (2.6). Khi đó các tính chất sau thoả mãn.*

*(a) Nếu $f \in L^p(\mathbb{T})$ với $1 < p \le \infty$, thì*

$$\| \Delta_j f \|_{L^p(\mathbb{T})} \le C \| f \|_{L^p(\mathbb{T})},$$
$$\| S_j f \|_{L^p(\mathbb{T})} \le C \| f \|_{L^p(\mathbb{T})},$$

*trong đó $C$ là hằng số chỉ phụ thuộc $p$ và $d$.*

*(b) Cho $h \ge 0$ và $j \ge 0$ là số nguyên. Giả sử $f \in L^p(\mathbb{T})$ với $1 < p \le \infty$, thì*

$$\Delta_h \Delta_j f = 0 \quad \text{nếu } h \ne j.$$

*(c) Cho $j \ge 0$, $m \ge 0$ và $n \ge 1$ là số nguyên. Giả sử $f, g \in L^p(\mathbb{T})$ với $1 < p \le \infty$. Thì*

$$\Delta_j (S_{m-n} f \Delta_m g) = 0 \text{ if } |m - j| \ge n,$$

*và*

$$\Delta_j (\Delta_m f \quad \Delta_m g) = 0 \quad \text{nếu } |m - j| \ge n,$$

*trong đó*

$$\Delta_m g = \Delta_{m-n+1} g + \Delta_{m-n+2} g + \cdots + \Delta_{m+n-1} g.$$

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Bất đẳng thức Bernstein cho toán tử $\Delta_j$ là nội dung của mệnh đề sau (xem [2, Mệnh đề 2.8]).

**Mệnh đề 2.5.** *Cho* $\sigma \geq 0$ *và* $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

*(a) Tồn tại hằng số* $C > 0$ *sao cho*

$$\| \Delta_j \Lambda^\sigma f \|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C 2^{\sigma j + 3j(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \| \Delta_j f \|_{L^q(\mathbb{T})}, \tag{2.7}$$

*và*

$$\| S_j f \|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C 2^{3j(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \| S_j f \|_{L^q(\mathbb{T})}. \tag{2.8}$$

*(b) Cho* $1 \leq p \leq \infty$. *Tồn tại hằng số* $0 < C_1 < C_2$ *(phụ thuộc* $p$ *) sao cho, với mọi số nguyên* $j \geq 0$,

$$C_1 2^{\sigma j} \| \Delta_j f \|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \| \Delta_j \Lambda^\sigma f \|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C_2 2^{\sigma j} \| \Delta_j f \|_{L^p(\mathbb{T})}. \tag{2.9}$$

Một khái niệm quan trọng trong lý thuyết chuyển động hỗn loạn của chất lỏng là số chiều gián đoạn của trường véctơ vận tốc $u$. Nó có thể được định nghĩa thông qua mức bảo hoà của bất đẳng thức Bernstein như sau

$$d := \sup\{ s \in \mathbb{R} : \langle \sum_j \lambda_j^{-1+s} \| \Delta_j u \|^2_{L^\infty(\mathbb{T})} \rangle \leq c^{3-s} L^{-s} \langle \sum_j \lambda_j^2 \| \Delta_j u \|^2_{L^2(\mathbb{T})} \rangle \}, \tag{2.10}$$

trong đó $c$ là hằng số tối ưu thoả mãn các bất đẳng thức

$$\| \Delta_j u \|^2_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq c \lambda_j^3 \| \Delta_j u \|^2_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Do đó, chúng ta có thể suy ra từ các kết quả đã có phía trên rằng $d \in [0,3]$ và các mối liên hệ tối ưu Bernstein

$$\| \Delta_j u \|_{L^\infty(\mathbb{T})} \sim \lambda_j^{\frac{3-d}{2}} \| \Delta_j u \|_{L^2(\mathbb{T})}, \tag{2.11}$$

và

$$\| \Delta_j u \|_{L^q(\mathbb{T})} \sim \lambda_j^{(3-d)(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \| \Delta_j u \|_{L^p(\mathbb{T})}, \tag{2.12}$$

ở đây $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

## 3. MÔ HÌNH BÀI TOÁN RỜI RẠC XẤP XỈ PHƯƠNG TRÌNH NAVIER-STOKES BẬC PHÂN TRONG XUYẾN BA CHIỀU

### 3.1. Xây dựng mô hình bài toán rời rạc thông qua phân rã Littlewood-Paley

Để đơn giản trong việc xử lý và giảm độ cồng kềnh của công thức, chúng ta ký hiệu $u_j = \Delta_j u$. Xét tác động của toán tử $\Delta_j$ lên phương trình (2.2) và lấy tích vô hướng phương trình nhận được với $u_j$, chúng ta nhận được phương trình cân bằng năng lượng trên khối thứ $j$ như sau

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u_j \|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \nu \| \Lambda^\alpha u_j \|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \langle B(u,u)_j, u_j \rangle + \lambda \| u_j \|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \langle f_j, u_j \rangle. \tag{3.1}$$

 p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Bước tiếp theo là đi phân tích sự biến đổi năng lượng của các số hạng trong mỗi phương trình cân bằng năng lượng (3.1). Chúng ta định nghĩa

$$\Pi(u,v,w) := \langle B(u,v), w\rangle = \int_{\mathbb{T}} (u\cdot\nabla v)\cdot w dx,$$

$$\Pi_j(u,v,w) := \langle B(u,v)_j, w_j\rangle = \int_{\mathbb{T}} (u\cdot\nabla v)_j \cdot w_j dx.$$

Xuyên suốt quá trình phân tích, chúng ta sử dụng giả thiết rằng: Sự tương tác chỉ xảy ra ở các khối kề nhau. Ngoài ra, vì tính chất không nén được $\nabla\cdot u_j = 0$, chúng ta có

$$\int_{\mathbb{T}} (u_i\cdot\nabla u_j)\cdot u_j dx = 0, \quad \text{với mọi } \ i, j\geq 0. \tag{3.2}$$

Khi đó, chúng ta sử dụng phân rã Littlewood-Paley và nhận được

$$\begin{aligned}\Pi_j(u,u,u) &= \langle B(u,u)_j, u_j\rangle \\ &= \Pi(u_{j-1},u_{j-1},u_j) + \Pi(u_j,u_{j-1},u_j) + \Pi(u_{j+1},u_{j-1},u_j) \\ &\quad + \Pi(u_{j-1},u_j,u_j) + \Pi(u_j,u_j,u_j) + \Pi(u_{j+1},u_j,u_j) \\ &\quad + \Pi(u_{j-1},u_{j+1},u_j) + \Pi(u_j,u_{j+1},u_j) + \Pi(u_{j+1},u_{j+1},u_j).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Sử dụng giả thiết về sự tương tác chỉ xảy ra ở các khối kề nhau và (3.2), phân rã (3.3) có thể viết gọn lại như sau:

$$\Pi_j(u,u,u) = \Pi(u_{j-1},u_{j-1},u_j) + \Pi(u_j,u_{j-1},u_j) \quad + \Pi(u_j,u_{j+1},u_j) + \Pi(u_{j+1},u_{j+1},u_j). \tag{3.4}$$

Chúng ta định nghĩa $a_j(t) := \| u_j(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}$. Sử dụng (2.7), (2.11), (2.12) và bất đẳng thức Holder, chúng ta có thể đánh giá các số hạng trong (3.4) như sau:

$$\begin{aligned}\Pi(u_{j-1},u_{j-1},u_j) &= \int_{\mathbb{T}} (u_{j-1}\cdot\nabla u_{j-1})\cdot u_j dx \\ &\lesssim \| u_{j-1}(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \| \nabla u_{j-1}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \| u_j(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \lesssim \lambda_{j-1}^{\frac{5-d}{2}} a_{j-1}^2 a_j.\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\Pi(u_j,u_{j-1},u_j) &= \int_{\mathbb{T}} (u_j\cdot\nabla u_{j-1})\cdot u_j dx = -\int_{\mathbb{T}} (u_j\cdot\nabla u_j)\cdot u_{j-1} dx \\ &\lesssim \| u_j(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \| \nabla u_j(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \| u_{j-1}(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \lesssim \lambda_j^{\frac{5-d}{2}} a_j^2 a_{j-1}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\Pi(u_j,u_{j+1},u_j) &= \int_{\mathbb{T}} (u_j\cdot\nabla u_{j+1})\cdot u_j dx = -\int_{\mathbb{T}} (u_j\cdot\nabla u_j)\cdot u_{j+1} dx \\ &\lesssim \| u_j(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \| \nabla u_j(t)\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \| u_{j+1}(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \lesssim \lambda_j^{\frac{5-d}{2}} a_j^2 a_{j+1}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\Pi(u_{j+1},u_{j+1},u_j) = \int_{\mathbb{T}} (u_{j+1}\cdot\nabla u_{j+1})\cdot u_j dx$$

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

$$\lesssim \| u_{j+1}(t) \|_{L^2(\mathbb{T})} \| \nabla u_{j+1}(t) \|_{L^\infty(\mathbb{T})} \| u_j(t) \|_{L^2(\mathbb{T})} \lesssim \lambda_{j+1}^{\frac{5-d}{2}} a_{j+1}^2 a_j. \tag{3.8}$$

Từ các đánh giá (3.5), (3.6), (3.7) và (3.8), chúng ta có thể ước lượng (3.4) như sau

$$\Pi_j(u,u,u) = \Pi(u_j, u_{j+1}, u_j) - \Pi(u_{j-1}, u_j, u_{j-1}) + \Pi(u_{j+1}, u_{j+1}, u_j) - \Pi(u_j, u_j, u_{j-1})$$

$$\lesssim \beta(\lambda_j^{\frac{5-d}{2}} a_j^2 a_{j+1} - \lambda_{j-1}^{\frac{5-d}{2}} a_{j-1}^2 a_j) + \eta(\lambda_{j+1}^{\frac{5-d}{2}} a_{j+1}^2 a_j - \lambda_j^{\frac{5-d}{2}} a_j^2 a_{j-1}). \tag{3.9}$$

Mặt khác, chúng ta có

$$\langle f_j, u_j \rangle \le \| f_j \|_{L^2(\mathbb{T})} \| u_j \|_{L^2(\mathbb{T})} = b_j a_j, \tag{3.10}$$

ở đây $b_j(t) := \| f_j(t) \|_{L^2(\mathbb{T})}$.

Sử dụng (3.9) và (3.10), phương trình cân bằng năng lượng (3.1) có thể được xấp xỉ như sau:

$$\frac{d}{dt} a_j^2 + \nu \lambda_j^{2\alpha} a_j^2 + \beta(\lambda_j^{\frac{5-d}{2}} a_j^2 a_{j+1} - \lambda_{j-1}^{\frac{5-d}{2}} a_{j-1}^2 a_j) + \eta(\lambda_{j+1}^{\frac{5-d}{2}} a_{j+1}^2 a_j - \lambda_j^{\frac{5-d}{2}} a_j^2 a_{j-1}) + \lambda a_j^2 = b_j a_j.$$

Đặt $\theta = \dfrac{5-d}{2}$ và chú ý rằng $a_j = 0$ với mọi $j < 0$. Khi đó, chúng ta lược bỏ $a_j$ trong (3.11) và nhận được mô hình bài toán rời rạc sau:

$$(\mathbf{A}) \begin{cases} \dfrac{d}{dt} a_0 + \nu a_0 + \beta a_0 a_1 + \eta \lambda_1^\theta a_1^2 + \lambda a_0 = b_0, \\ \dfrac{d}{dt} a_j + \nu \lambda_j^{2\alpha} a_j + \beta(\lambda_j^\theta a_j a_{j+1} - \lambda_{j-1}^\theta a_{j-1}^2) \\ \qquad + \eta(\lambda_{j+1}^\theta a_{j+1}^2 - \lambda_j^\theta a_j a_{j-1}) + \lambda a_j = b_j, \end{cases}$$

với $j = 1, 2, 3, \cdots$.

**Nhận xét 3.1.**

**i)** Giả sử $Q_j := \Pi(u_j, u_{j+1}, u_j)$ và $P_j := \Pi(u_{j+1}, u_{j+1}, u_j)$. Khi đó,

$$\Pi_j = Q_j - Q_{j-1} + P_j - P_{j-1}.$$

Giả sử $Q_j \ge 0$ và $P_j \ge 0$ với mọi $j \ge -1$. Các số hạng $Q_j$ và $P_j$ đóng vai trò là năng lượng chuyển sang cho khối tiếp theo, trong khi $Q_{j-1}$ và $P_{j-1}$ đóng vai trò là năng lượng của khối phía trước chuyển vào.

**ii)** Khi chất lỏng là không nhớt ($\nu = 0$), số hạng tắt dần và ngoại lực không tồn tại ($\lambda = 0$ và $f = 0$). Chúng ta xét phương trình xấp xỉ của (3.1) như sau

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} a_j^2 + Q_j - Q_{j-1} + P_j - P_{j-1} = 0.$$

Khi đó, $a(t)^2 = \sum_{j \ge 1} a_j^2$ là tổng năng lượng thoả mãn $\dfrac{d}{dt} a(t)^2 = 0$. Điều này chứng tỏ năng lượng được bảo toàn trong trường hợp này.

 p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

**iii)** Mô hình bài toán rời rạc **(A)** có thể được xem như mô hình tổng quát xấp xỉ phương trình Navier-Stokes bậc phân chứa sô hạng tắt dần kiểu tuyến tính trong xuyến ba chiều. Mô hình này có sự kết nối với nhiều mô hình đã được nghiên cứu trước đó. Chúng ta có thể điểm qua như sau: Nếu $\alpha=1$, $\beta=1$, $\eta=0$ và $\lambda=0$, thì chúng ta nhận được mô hình bài toán rời rạc của N. Katz and N. Pavlović (xem [8]). Nếu $\alpha=1$, $\beta=0$, $\eta=1$ và $\lambda=0$, thì chúng ta nhận được mô hình bài toán rời rạc của Obukhov (xem [9]). Nếu $\alpha=1$ và $\lambda=0$, thì chúng ta nhận được mô hình bài toán rời rạc xấp xỉ phương trình Navier-Stokes được M. Dai đưa ra [3].

### 3.2 Sự tồn tại nghiệm Leray-Hopf

Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của mô hình bài toán **(A)**, đầu tiên chúng ta cần định nghĩa không gian trạng thái phù hợp. Đặt $V^0:=\ell^2$ không gian các dãy số được trang bị tích vô hướng và chuẩn như sau: Giả sử $u:=\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ và $v:=\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ là các phần tử của $V^0$.

$$(u,v)_{V^0}:=\sum_{n=0}^{\infty}u_nv_n,$$

$$\| u\|_{V^0}:=\sqrt{(u,u)_{V^0}}=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}u_n^2\Big)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Không gian $V^s$, $s\in\mathbb{R}$, là không gian các dãy số được trang bị tích vô hướng và chuẩn như sau

$$(u,v)_{V^s}:=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{2s}u_nv_n,$$

$$\| u\|_{V^s}:=\sqrt{(u,u)_{V^s}}=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{2s}u_n^2\Big)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Tiếp theo, chúng ta có một số khái niệm về nghiệm của bài toán **(A)** như sau

**Định nghĩa 3.2.** Một nghiệm yếu trên $[T,\infty)$ (hoặc $(-\infty,\infty)$ nếu $T=-\infty$) của **(A)** là một hàm $a(t)$ xác định trên $[T,\infty)$ và nhận giá trị trong $V^0$ thoả mãn $a_n(t)\in C^1([T,\infty))$ và các $a_n(t)$ thoả mãn các phương trình của **(A)**.

**Định nghĩa 3.3.**

**a)** Nghiệm yếu $a(t)$ của **(A)** được gọi là nghiệm mạnh trên $[T_1,T_2]\subset[T,\infty)$ nếu $\| a\|_{V^\alpha}$ bị chặn trên $[T_1,T_2]$.

**b)** Nghiệm yếu $a(t)$ của **(A)** được gọi là nghiệm mạnh trên $[T,\infty)$ nếu $\| a\|_{V^\alpha}$ bị chặn trên mọi đoạn $[T_1,T_2]\subset[T,\infty)$.

**Định nghĩa 3.4.** Một nghiệm Leray-Hopf $a(t)$ trên $[T,\infty)$ của **(A)** là một nghiệm yếu $a(t)$ trên $[T,\infty)$ của **(A)** thoả mãn bất đẳng thức năng lượng

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

$$\| a(t) \|_{V^0}^2 + 2\nu \int_{t_0}^{t} \| a(s) \|_{V^\alpha}^2 \, ds \le \| a(t_0) \|_{V^0}^2 + 2\int_{t_0}^{t} (b(s), a(s))_{V^0} \, ds$$

với mọi $T \le t_0 \le t$ và hầu khắp nơi $t_0 \in [T, \infty)$.

Sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin và thực hiện quy trình chứng minh như chứng minh [1, Định lý 4.1], chúng ta cũng sẽ nhận được kết quả sau đây. Vì kỹ thuật chứng minh là tương tự và để giảm bớt sự cồng kềnh của bài báo nên nội dung chứng minh chi tiết của định lý không được trình bày ở đây.

**Định lý 3.5.** *Giả sử* $\nu$, $\alpha$ *là các số thực dương,* $\lambda \ge 0$, $a^0 \in V^0$. *Với mọi* $t \ge 0$, *giả sử rằng*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{-2\alpha} \int_0^t b_j^2(\tau) d\tau < \infty.$$

*Khi đó, tồn tại nghiệm Leray-Hopf* $a(t)$ *trên* $[0,\infty)$ *của* **(A)** *thoả mãn* $a(0) = a^0$ *và Định nghĩa 3.4.*

**Nhận xét 3.6.**

**i)** Sự tồn tại nghiệm Leray-Hopf $a(t)$ của **(A)** trong Định lý 3.5 có thể mở rộng cho bất kỳ miền $[T, \infty)$.

**ii)** Tính đặt chỉnh và các vấn đề liên quan mô hình bài toán **(A)** chứa đựng nhiều vấn đề mở. Các kết quả này sẽ được nhóm tác giả trình bày trong kết quả nghiên cứu tiếp theo.

## 4. KẾT LUẬN

Nội dung của bài báo đã trình bày tóm tắt các kết quả cơ bản về phương trình Navier-Stokes bậc phân trong xuyến ba chiều và phân rã Littlewood-Paley đối với hàm tuần hoàn. Kết quả mới của bài báo là xây dựng được mô hình bài toán rời rạc xấp xỉ được phương trình Navier-Stokes bậc phân trong xuyến ba chiều và chứng minh sự tồn tại nghiệm Leray-Hopf của mô hình bài toán rời rạc nhận được.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. Cheskidov (2008), *Blow-up in finite time for the dyadic model of the Navier-Stokes equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 360, no.10, 5101-5120.

[2] Y.Dai,W.Hu, J.Wu and B,Xiao (2020), *The Littlewood - Paley decomposition for periodic functions and applications to the Boussinesq equations*, Anal. Appl. Singap. 18(4), 639-682.

[3] M. Dai (2020), *Dyadic models with intermittency dependence for the Hall MHD*, arXiv: 2006.15094.

[4] Loukas Grafakos (2008), *Classical Fourier analysis, Second edition*, vol.249. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer.

[5] F.Weisz (2012), *Summability of Multi-Dimentional Trigonometric Fourier Series*, Surveys in Approximation Theory 17, 1-179.

[6] J.L. Lions (1969), *Quelques Méthodes de Resolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, vol.1. Dunod, Paris.

[7] T. Luo and E. S. Titi (2020), *Non-uniqueness of weak solutions to hyperviscous Navier-Stokes equations: on sharpness of J.-L. Lions exponent*, Calc. Var. 59, 92.

[8] N. Katz and N. Pavlović (2005), Finite time blow-up for a dyadic model of the Euler equations, Trans. Amer. Math. Soc., 357(2), 695-708.

[9] A. M. Obukhov (1971), *Some general properties of equations describing the dynamics of the atmosphere*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz. Atmosfer. i Okeana, 7:695-704.

# DYADIC MODELS FOR THE GENERALIZED NAVIER-STOKES EQUATIONS

**Pham Thi Van, Le Tran Tinh, Le Thi Mai**

ABSTRACT

*In this article, we construct a general dyadic model for the 3D generalized Navier-Stokes equations on torus. Then, we study the existence of Leray-Hopf solutions of this model. Our results extend and improve some previous results.*

**Keywords:** *Generalized Navier-Stokes equations, Leray-Hopf solutions.*

** Ngày nộp bài: 19/5/2024; Ngày gửi phản biện: 25/5/2024; Ngày duyệt đăng: 15/11/2024*