p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

NCS-MÔ ĐUN VÀ ỨNG DỤNG

Hoàng Đình Hải[1], Nguyễn Thị Hà Nhi[2], Nguyễn Hải Yến[2] , Trần Lê Huyền[2], Nguyễn Thị Hương Giang[3]

TÓM TẮT

Có những cấu trúc, từ thuở ban sơ khi mới được hình thành có thể còn có những đặc trưng chưa hoàn chỉnh. Ví dụ tổng trực tiếp của hai phần tử cùng cấu trúc đại số không còn thuộc tính của cấu trúc đó. NCS-môđun là một trong những cấu trúc có hiện tượng này. Trong bài bào này, chúng tôi đưa ra một cấu trúc môđun nhằm khắc phục hiện tượng trên nhưng vẫn giữ nguyên một số thuộc tính ban đầu của NCS-môđun, đó là NCS-môđun nội xạ. Điều đáng nói là NCS-môđun nội xạ đã cho ta một sự phân loại trên một số lớp môđun nội xạ. Đây chính là ý nghĩa khoa học của việc ứng dụng NCS-môđun nội xạ trong phân loại cấu trúc đại số.

Từ khóa: *NCS-môđun, môđun con đóng, môđun con đối đóng, môđun con không đối kì dị, môđun nội xạ.*

DOI:*https://doi.org/10.70117/hdujs.71.2024.683*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong suốt bài báo này R được nhắc đến như là một vành kết hợp, có đơn vị và mọi môđun đều là R-môđun phải.

Cho A,B là các môđun con của M. Ta nói B là phần bù của A trong M hay A có một phần bù B trong M, đôi khi ta nói A là bù được, nếu hai điều kiện sau xảy ra:

$$A + B = M$$

Nếu $B' \subseteq B$ mà $A + B' = M$ thì B=B'.

Điều kiện 2) ở trên muốn nói rằng B là môđun nhỏ nhất thoả mãn tính bù được $A + B = M$. Môđun M là bù được nếu mọi môđun con của M đều bù được.

Môđun M được gọi là bù đầy đủ nếu mọi cặp môđun con A, B mà $A + B = M$ thì A có phần bù trong B. Có nghĩa là tồn tại môđun con P của B nhỏ nhất sao cho $A + P = M$.

Trong bài báo này chúng ta kí hiệu ModB là tập các R-môđun bù đầy đủ.

Môđun con A của M được gọi là mịn nếu với mọi môđun con thực sự B của M thì $A + B \neq M$, tương đương là nếu có $A + B = M$ thì B=M. Khi đó, kí hiệu $A \subseteq^0 M$. Môđun M được gọi là mịn nếu nó là môđun con mịn trong bao nội xạ của nó. Kí hiệu $\mathcal{S}$ là lớp các môđun mịn.

Kí hiệu $\overline{Z(M)} = \cap \{Kerf \mid f: M \to S, S \in \mathcal{S}\} = \cap \{U \subseteq M \mid M/U \in \mathcal{S}\}$.

---

[1] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức; Email: hoangdinhhai@hdu.edu.vn*

[2] *Sinh viên K25 ĐHSP Toán CLC, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

[3] *Học viên lớp Cao học K15 Đại số và Lý thuyết số, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

M được gọi là đối kì dị (tương ứng không đối kì dị) nếu $\bar{Z}(M)$=0, (tương ứng $\bar{Z}(M)$=M) Chúng ta biết rằng mọi môđun mịn là đối kì dị.

Môđun con A của M được gọi là đóng nếu A không có mở rộng cốt yếu thực sự trong M. Nghĩa là nếu có $A \subseteq B \subseteq M$, B cốt yếu trong M thì B=M.

Môđun con A của M được gọi là đối đóng trong M (tham khảo[1]) nếu A/B là không mịn trong M/B với bất kì môđun con thực sự B của A.

R-môđun M được gọi là D_1- môđun nếu với mọi môđun con N của M, tồn tại một hạng tử trực tiếp K của M sao cho $K \subseteq N$ mà $N/K \subseteq^0 M/K$. M là D_1- môđun nếu và chỉ nếu $M \in ModB$ và mọi môđun con đối đóng của M là hạng tử trực tiếp.

Một số khái niệm được nhắc đến trong bài báo này được trình bày chi tiết trong [3],[5]

Năm 2012 Dejun Wu đưa ra cấu trúc NCS-môđun với khá nhiều tính chất phong phú. Tuy nhiên cấu trúc này theo chúng tôi là chưa đẹp về mặt đại số, điều này sẽ được bình luận ở Mục 2.2 và đó là lí do chính để chúng tôi chọn hướng nghiên cứu này.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Trong phần này, bên cạnh việc giới thiệu các kết quả nghiên cứu các cấu trúc cơ bản, đơn giản, phục vụ cho việc xây dựng cấu trúc mới; chúng ta nghiên cứu cấu trúc NCS-môđun và các mối liên quan của nó. Từ đó xác định lỗi cấu trúc đại số của NCS-môđun để xây dựng cấu trúc mới hoàn chỉnh hơn. Ngoài ra, trong [2] tác giả cũng đã chỉ ra rằng mọi môđun con bù N là đối đóng trong M. Và khi đó mọi môđun con X của N, X mịn trong M thì X mịn trong N. Lớp các môđun không đối kì dị là đóng đối với phép lấy ảnh đồng cấu, tổng trực tiếp, mở rộng, phủ nội xạ và các môđun con đối đóng. Môđun con không đối kì dị của một môđun là môđun con đối đóng và môđun con của môđun không đối kì dị là đối đóng khi và chỉ khi nó là môđun không đối kì dị. Tuy nhiên những nhận xét trên không được tác giả chứng minh một cách rõ ràng, chúng ta sẽ có các chứng minh cần thiết trong phần này.

Chúng ta có thể tham khảo một cách chi tiết hơn trong các tài liệu tham khảo [1] và [2]. Nếu thấy thực sự cần thiết, các chứng minh sẽ được trình bày.

Trước hết chúng ta làm quen với một số nội dung liên quan đến các từ khoá đối đóng, bù được, không đối kì dị như là những vật liệu cần thiết để nghiên cứu cấu trúc NCS-môđun.

Mệnh đề 2.1.[1] Cho A, B là các môđun con của R-môđun M, M=A+B. Khi đó ta có:

1) B là phần bù của A trong M nếu và chỉ nếu $A \cap B$ mịn trong B.

2) B là phần bù của A thì B là môđun con đối đóng của M.

3) B là phần bù của A trong M thì với bất kì môđun con C của A, đẳng thức $M = C + B$ xảy ra khi và chỉ khi A/C mịn trong M/C.

Nhận xét 2.1. Mọi môđun đơn đều là không đối kì dị.

Chứng minh: Giả sử M là môđun đơn. Gọi U là môđun con bất kì của M sao cho $M/U \subseteq^0 M$. Do M là môđun đơn nên $M/U = 0$. Điều đó dẫn đến $U = M$, hay $\bar{Z}(M)$=M.

Nhận xét 2.2. Tổng trực tiếp đếm được của các môđun con không đối kì dị là môđun con không đối kì dị.

Chứng minh: Nhận xét được sáng tỏ bởi phương pháp qui nạp. Chúng ta cần chứng minh trong trường hợp có 2 hạng tử trực tiếp.

Giả sử M_1, M_2 là các môđun con không đối kì dị của R-môđun M.

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Ta cần chứng minh $M_1 \oplus M_2$ là môđun con không đối kì dị.

Gọi U là môđun con bất kì của $T = M_1 \oplus M_2$ sao cho $T/U \subseteq^0 T$. U có dạng $U = U_1 \oplus U_2$ trong đó $U_1 \subseteq M_1$, $U_2 \subseteq M_2$.

Vậy thì $T/U = (M_1 \oplus M_2)/(U_1 \oplus U_2) = (M_1/U_1) \oplus (M_2/U_2)$.

Do $T/U \subseteq^0 T$ nên $(M_1/U_1) \subseteq^0 M_1$ và $(M_2/U_2) \subseteq^0 M_2$.

Bởi vậy, $U_1 \in \bar{Z}(M_1)$ và $U_2 \in \bar{Z}(M_2)$.

Lại có $\cap \{U_1 | U_1 \subseteq M_1, (M_1/U_1) \subseteq^0 M_1\} = \bar{Z}(M_1)$

và $\cap \{U_2 | U_2 \subseteq M_2, (M_2/U_2) \subseteq^0 M_2\} = \bar{Z}(M_2)$.

Bên cạnh đó, M_1, M_2 là các môđun con không đối kì dị của R-môđun M nên $\bar{Z}(M_1)$=M_1, $\bar{Z}(M_2)$=M_2. Từ đó suy ra $\bar{Z}(T) = T$.

Nhận xét 2.3. Nếu M là môđun nửa đơn thì $M \in ModB$.

Chứng minh: Trước hết chúng ta chứng minh rằng:

Nếu $M, N \in ModB, M \cap N = 0$ thì $T = M \oplus N \in ModB$.

Gọi A là môđun con bất kì của T. $A = A_M \oplus A_N$ trong đó $A_M \subseteq M$, $A_N \subseteq N$.

Do $M \in ModB, A_M \subseteq M$, tồn tại $B_M \subseteq M$ là phần bù của A_M trong M.

Do $N \in ModB, A_N \subseteq N$, tồn tại $B_N \subseteq N$ là phần bù của A_N trong N.

Đặt $B = B_M \oplus B_N$. Ta có B là phần bù của A trong T.

Giả sử D là môđun đơn. D chỉ có môđun con tầm thường. Các môđun con tầm thường đều có phần bù trong D, chứng tỏ D $\in ModB$.

Cuối cùng, nếu M là môđun nửa đơn thì M là tổng trực tiếp các môđun con đơn, do đó $M \in ModB$.

Nhận xét 2.4. Môđun con của môđun bù được là môđun bù được.

Chứng minh: Giả sử N là môđun con của môđun bù được M. A là môđun con của N.

Do M là bù được, tồn tại môđun con A' của M nhỏ nhất thoả mãn đẳng thức A+A'=M. Đặt $B = A' \cap N$. Hiển nhiên $A + B \subseteq N$. Lấy bất kì $n \in N$, tồn tại $a \in A$, $a' \in A'$ sao cho $n = a + a'$. Hay $a' = n - a$ là phần tử của N. Điều đó chứng tỏ $a' \in N$. Suy ra $a' \in B$. Như vậy, $n = a + a' \in A + B$. Có nghĩa là $N = A + B$. Tính nhỏ nhất của B thoả mãn đẳng thức này được suy từ tính nhỏ nhất của A'.

Nhận xét 2.5. Hạng tử trực tiếp của một phần tử thuộc $ModB$ là một phần tử của ModB.

Chứng minh: Cho $M \in ModB$ và N là hạng tử trực tiếp của M, $M = N \oplus N'$. Xét cặp môđun con X,Y của N mà N=X+Y, ta cần chứng minh trong Y tồn tại môđun con P cực tiểu thoả mãn đẳng thức $X + P = N$.

Ta thấy, M= X+Y +N'= X+(Y +N'). Do $M \in ModB$ ta suy ra X có phần bù trong Y +N'. Nghĩa là tồn tại môđun con X' của Y +N' nhỏ nhất sao cho X+X'=M. Khi đó $P := Y \cap X'$ thoả mãn yêu cầu đề ra.

Mệnh đề 2.2. Các kết quả sau đây được tổng hợp từ [2]:

Môđun con không đối kì dị của một môđun là môđun con đối đóng.

Môđun con của môđun không đối kì dị là đối đóng khi và chỉ khi nó là không đối kì dị.

Ảnh đồng cấu của môđun không đối kì dị là môđun không đối kì dị.

Tổng trực tiếp của các môđun không đối kì dị là môđun không đối kì dị.

Mở rộng cốt yếu của môđun không đối kì dị là môđun không đối kì dị.

Phủ mịn của môđun không đối kì dị là môđun không đối kì dị.

Môđun con đối đóng của môđun không đối kì dị là môđun không đối kì dị.

 p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Mệnh đề 2.3.[2] Cho $M = M_1 \oplus M_2$. M_1 là M_2-xạ ảnh nếu và chỉ nếu mọi môđun con N của M với $M = N \oplus M_2$ tồn tại một môđun con N' của N sao cho $M = N' \oplus M_2$.

Định nghĩa 2.1.[2] $M \in ModB$ được gọi là một NCS-môđun nếu mọi môđun con không đối kì dị là hạng tử trực tiếp.

Nhận xét 2.6. Tổng trực tiếp của các NCS-môđun không còn là một NCS-môđun.

Trong [2] tác giả cho thấy trong trường hợp tổng quát, tổng trực tiếp của các NCS-môđun không phải là NCS-môđun. Đặt ra câu hỏi: vậy thì trong điều kiện nào, tổng trực tiếp của các NCS-môđun là NCS-môđun. Trả lời câu hỏi này, chúng ta có các kết quả sau đây:

3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ THẢO LUẬN

3.1. NCS-môđun nội xạ

Định nghĩa 3.1. $M \in ModB$ được gọi là một NCS-môđun nội xạ nếu mọi đồng cấu từ môđun con không đối kì dị luôn mở rộng được thành tự đồng cấu trên M.

Mô tả định nghĩa này, M là NCS-nội xạ nếu với mọi đồng cầu f từ môđun con N không đối kì dị của M, tồn tại đồng cấu $\overline{f} : M \to M$ sao cho biểu đồ sau là giao hoán:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

Ví dụ 3.1. Từ định nghĩa trên chúng ta thấy mọi NCS-môđun là NCS-môđun nội xạ.

Thật vậy, giả sử A là một môđun con không đối kì dị của một NCS-môđun M. Khi đó tồn tại môđun con B của M sao cho $A \oplus B = M$. Mọi đồng cấu $f: A \to M$ luôn mở rộng được thành $\bar{f} : M \to M$ như sau: với mọi $m \in M$, biểu diễn m=a+b trong đó $a \in A$, $b \in B$ là duy nhất và $\bar{f}(m) := f(a)$.

Ví dụ 3.2. Giả sử p là một số nguyên tố, $\mathbb{Z}$-môđun $\mathbb{Z}_p$ là môđun đơn chỉ có môđun con tầm thường. Gọi U là môđun con của $\mathbb{Z}_p$ thì $\mathbb{Z}_p/U$ mịn trong $\mathbb{Z}_p$. Từ thực tế này, ta thấy $\mathbb{Z}_p$ là môđun không đối kì dị. Và dễ để nhận biết rằng $\mathbb{Z}_p$ là môđun NCS-nội xạ.

Ví dụ 3.3. Xét vành:

$$R = \begin{bmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{bmatrix},$$ trong đó $\mathbb{R}$ là trường các số thực.

Trong [6], R là vành đếm được $\sum -CS$ phải và CS-nửa đơn. Trong [4] vành R là CS- nửa đơn sẽ là vành Artin trái và phải và do đó R là vành Noetherian phải. Hơn nữa, vì R là vành CS - nửa đơn nên $U \oplus U$ là CS với mọi iđêan phải đều U của R. Tuy nhiên cũng trong [6], bao nội xạ của RR là

$$E\left(R_R\right) = \begin{bmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} & \mathbb{R} \end{bmatrix} \neq R_R,$$

điều này suy ra R không phải là vành tựa nội xạ phải. Do đó R không phải là vành QF. Tuy nhiên R là NCS- nội xạ.

 p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Định lý 3.1. Hạng tử trực tiếp của một NCS-môđun nội xạ là một NCS-môđun nội xạ.

Chứng minh: Giả sử M là một NCS-môđun nội xạ và A là mộtang hạng tử trực tiếp của M.

Xét sơ đồ sau:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[r, hook, "i_2"] \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] & M \arrow[ddll, "\varphi"] \\
 & A \arrow[d, shift right, "i_3"'] & & \\
 & M \arrow[u, shift right, "\pi_A"'] & &
\end{tikzcd}$$

Gọi N là môđun con không đối kì dị bất kì của A và f là đồng cấu từ N vào A. Chúng ta sẽ chỉ ra sự tồn tại của đồng cấu $\bar{f}: A \rightarrow A$ để sơ đồ trên là giao hoán. Nghĩa là $f = \bar{f}.\iota_1$ trong đó ι_1 là phép nhúng từ N vào A.

Nhúng A vào M bởi ι_2 và ι_3 như trong sơ đồ trên. Do M là NCS- nội xạ, với đồng cấu $\iota_3 f$, tồn tại đồng cấu $\varphi: M \rightarrow M$ sao cho $\iota_3 f = \varphi\ \iota_2\iota_1$

Gọi Π_A là toàn cấu chiếu tự nhiên từ M lên hạng tử trực tiếp A của nó.

Đặt $\bar{f}: A \rightarrow A$ sao cho $\bar{f} = \Pi_A\varphi\iota_2$. Khi đó, $\bar{f}\ \iota_1 = \Pi_A\varphi\iota_2\iota_1 = \Pi_A\iota_3 f.$ Do đó $\bar{f}$ chính là mở rộng của f. Chứng tỏ A là một NCS- môđun nội xạ.

3.2. NCS-môđun nội xạ khắc phục lỗi cấu trúc của NCS-môđun

Như đã nhắc đến ở Nhận xét 2.6, việc tìm điều kiện để tổng trực tiếp các NCS-môđun là NCS-môđun là có ý nghĩa.

Định lý 3.2. Tổng trực tiếp của một số đếm được các NCS-môđun nội xạ là một NCS-môđun nội xạ.

Chứng minh: Bằng phương pháp qui nạp chúng ta chỉ cần chứng minh định lý đúng trong trường hợp n=2.

Giả sử M_1, M_2 là các R-môđun NCS-nội xạ rời nhau, ta chứng minh $M = M_1 \oplus M_2$ cũng là NCS-môđun nội xạ. Môđun con A không đối kì dị bất kì của M có dạng $A = A_1 \oplus A_2$ trong đó $A_1 \subseteq M_1$, $A_2 \subseteq M_2$. Gọi $f: A \rightarrow M$ là đồng cấu bất kì như trong sơ đồ 1. Chúng ta cần chứng minh sự tồn tại của đồng cấu mở rộng $\overline{f}: M \rightarrow M$ của f.

Thật vậy, gọi ι_1, ι_2 lần lượt là các phép nhúng tự nhiên từ A_1, A_2 tới A và π_{M_1}, π_{M_2} lần lượt là các phép chiếu tự nhiên từ M tới M_1, M_2 cho như trong sơ đồ 2.

Gọi τ_1, τ_2 lần lượt là các phép nhúng tự nhiên từ A_1, A_2 tới M_1, M_2 như trong sơ đồ 3.

Do M_1là NCS-môđun nội xạ nên trong sơ đồ 3, tồn tại đồng cấu f_1 là mở rộng trên M_1 của đồng cấu hợp thành $\pi_{M_1} f \iota_1$ từ A_1 đến M_1.

Cũng bởi M_2 là NCS-môđun nội xạ nên trong sơ đồ 4, tồn tại đồng cấu f_2 là mở rộng trên M_2 của đồng cấu hợp thành $\pi_{M_2} f \iota_2$ từ A_2 đến M_2.

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

$$\begin{tikzcd} A_1 \oplus A_2 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M_1 \oplus M_2 \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"] \\ M_1 \oplus M_2 & \end{tikzcd}$$

Sơ đồ 1

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[dr, "i_1"'] & & A_2 \arrow[dl, "i_2"] \\ & A_1 \oplus A_2 \arrow[d, "f"'] & \\ & M_1 \oplus M_2 \arrow[dl, "\pi_{M_1}"'] \arrow[dr, "\pi_{M_2}"] & \\ M_1 & & M_2 \end{tikzcd}$$

Sơ đồ 2

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "\pi_{M_1} f i_1"'] & M_1 \arrow[dl, "f_1"] \\ M_1 & \end{tikzcd}$$

Sơ đồ 3

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "\tau_2"] \arrow[d, "\pi_{M_2} f i_2"'] & M_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ M_2 & \end{tikzcd}$$

Sơ đồ 4

Dễ dàng chứng minh được rằng đồng cấu $\underset{(m_1,m_2) \mapsto (f_1(m_1), f_2(m_2))}{\overline{f}: M \to M}$ là mở rộng của f.

Hệ quả 3.1. Từ Ví dụ 3.2 và Định lý 3.2, cho p là số nguyên dương sao cho $p = p_1.p_2...p_n$ trong đó p_i là các số nguyên tố. Khi đó $\mathbb{Z}$ -môđun $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{p}}$ là một NCS-môđun nội xạ.

Mệnh đề 3.4. D_1-môđun không đối kì dị là một NCS- môđun nội xạ.

Chứng minh: Giả sử M là một D_1-môđun không đối kì dị. Và N là môđun con không đối kì dị của M. Do Mệnh đề 2.2 ta có N là môđun con đối đóng của M. Vì M là D_1-môđun nên N là hạng tử trực tiếp của M. Điều đó chứng tỏ M là NCS-môđun và do đó là NCS-môđun nội xạ.

Từ Mệnh đề 2.2, ta nhận thấy rằng trong lớp các môđun không đối kì dị thì khái niệm NCS-môđun và D_1-môđun là trùng nhau.

4. KẾT LUẬN

Từ việc nghiên cứu cấu trúc của NCS môđun, chúng tôi đã đưa ra được một cấu trúc NCS-môđun nội xạ mà theo chúng tôi là đẹp hơn với các ý nghĩa đại số sau;

1, Tổng trực tiếp của các NCS-môđun không hẳn là NCS-môđun trong khi NCS-môđun nội xạ khắc phục được khiếm khuyết về cấu trúc này trong khi nó vẫn lưu giữ một số đặc tính của NCS-môđun.

2, Chúng ta đã có được một phân loại khá rõ ràng về cấu trúc lớp vành và môđun nội xạ như sau: môđun nội xạ ⇒NCS-môđun ⇒NCS-môđun nội xạ ở đó chiều ngược lại là không xảy ra.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Tomio INOUE (1983), *Sum of hollow modules*, Osaka J.Math, 20, 331-336.

[2] Dejun Wu (2012), *On NCS-modules*, Shoutheast Asian Bulletin of Mathematics, 36, 721-727.

[3] F. W. Anderson, K. R. Fuller (1974), *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York-Berlin.

[4] N. V. Dung, D. V. Huynh, P. F. Smith, R. Wisbauer (1994), *Extending Modules*, Pitman, London.

[5] S. H. Mohamed, B. J. Muller (1990), *Continuous and Discrete Modules*, London Math. Soc. Lecture Note Series, 147, Cambridge Univ. Press.

[6] D. V. Huynh (2002), *Some remarks on CS modules and SI rings*, Bull. Austral. Math. Soc., Vol. 65, 461-466.

NCS-MODULES AND APPLICATION

Hoàng Dinh Hai, Nguyen Thi Ha Nhi, Nguyen Hai Yen, Tran Le Huyen, Nguyen Thi Huong Giang

ABSTRACT

There are structures, from the very beginning when they were first formed, may still have incomplete characteristics. For example, the direct sum of two elements of the same algebraic structure no longer has properties of that structure. NCS-module is one of the structures with this phenomenon. In this paper, we try to provide a module structure to overcome the above phenomenon but still retain some of the original properties of NCS-module, that is, injective-NCS-module. It is worth mentioning that injective-NCS-modules have given us a classification on several classes of injective modules. This is the scientific meaning of applying NCS-injective modules in classifying algebraic structures.

Keywords: *NCS-module, Closed submodule, Cosingular submodule, NonCosingular submodule, Injective module.*

** Ngày nộp bài: 25/3/2024; Ngày gửi phản biện: 28/3/2024; Ngày duyệt đăng: 15/11/2024*