MỘT SỐ ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG KIỂU EDELSTEIN CHO ÁNH XẠ KHÔNG LIÊN TỤC TRONG KHÔNG GIAN MÊTRIC

Nguyễn Văn Lương[1], Hoàng Thị Hưng[2]

TÓM TẮT

Trong bài báo này chúng tôi trình bày một số định lý điểm bất động cho ánh xạ không liên tục thoả mãn các điều kiện co kiểu Edelstein trong không gian mêtric.

Từ khóa: *Điểm bất động, liên tục quỹ đạo, compắc quỹ đạo, compắc bị chặn.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Lý thuyết điểm bất động là một trong những hướng nghiên cứu quan trọng của giải tích với nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học và các ngành khoa học khác. Nguyên lý ánh xạ co Banach, được phát biểu năm 1922 trong luận án tiến sĩ của Banach, là một trong những kết quả ban đầu với nhiều ứng dụng. Tuy nhiên, phải tới những năm 60 của thế kỷ XX lý thuyết điểm bất động cho ánh xạ thoả mãn các điều kiện co trong không gian mêtric mới được quan tâm và phát triển mạnh. Nhiều kết quả mở rộng nguyên lý ánh xạ co Banach được đưa ra, tiêu biểu là các công trình của M. Edelstein ([1]), R. Kannan ([2]), S. Reich ([3]), G. E. Hardy và T. D. Rogers ([4]), L. B. Ciric ([5]).

Năm 1977, B. E. Rhoades ([8]) so sánh 250 điều kiện co khác nhau và chỉ ra rằng hầu hết các điều kiện co không dẫn tới ánh xạ liên tục trên toàn bộ không gian. Tuy nhiên, tất cả các trường hợp đều dẫn tới ánh xạ liên tục tại các điểm bất động. Năm 1988, B. E. Rhoades ([7]) kiểm tra lại tính liên tục của một số lượng lớn các ánh xạ thoả mãn các điều kiện co khác nhau và tiếp tục chỉ ra rằng các ánh xạ này liên tục tại các điểm bất động dù không liên tục trên toàn bộ không gian. Sau đó, B. E. Rhoades đã đưa ra một câu hỏi mở: Tồn tại hay không một điều kiện co trong đó ánh xạ thoả mãn điều kiện co đó có điểm bất động nhưng không nhất thiết liên tục tại điểm bất động? R. P. Pant là người đầu tiên đưa ra câu trả lời cho câu hỏi trên vào năm 1999 trong bài báo [11]. Sau đó, nhiều tác giả khác đã có các câu trả lời cho câu hỏi của B. E. Rhoades. Hiện tại, câu hỏi của B. E. Rhoades vẫn nhận được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số định lý điểm bất động cho ánh xạ thỏa mãn điều kiện co suy rộng kiểu Edelstein (xem Định lý 2.2) cho các ánh xạ không nhất thiết liên tục trong không gian mêtric, qua đó đưa ra một số câu trả lời mới cho câu hỏi của B. E. Rhoades.

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VÀ KẾT QUẢ CƠ BẢN

Cho (X, d) là một không gian mêtric. Nhắc lại rằng, một ánh xạ $T: X \to X$ được gọi là co nếu tồn tại $k \in [0,1)$ sao cho

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in X. \tag{1}$$

[1] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức; Email: nguyenvanluong@hdu.edu.vn*

[2] *Phòng Tổ chức - Hành chính - Quản trị, Trường Đại học Hồng Đức*

Nguyên lý ánh xạ co Banach phát biểu rằng mọi ánh xạ co T trong không gian mêtric đầy đủ (X, d) đều có điểm bất động duy nhất, tức là tồn tại duy nhất $x \in X$ sao cho $Tx = x$. Nguyên lý ánh xạ co Banach được quan tâm mở rộng và phát triển theo nhiều hướng khác nhau. Năm 1962, Edelstein [1] đã chứng minh kết quả sau.

Định lý 2.1. ([1]) Cho (X, d) là một không gian mêtric compắc. Nếu ánh xạ $T: X \to X$ thỏa mãn

$$d(Tx, Ty) < d(x, y) \quad \forall x, y \in X, x \neq y \tag{2}$$

thì T có điểm bất động duy nhất trong X.

Điều kiện (2.2) được gọi là điều kiện co Edelstein. Trong định lý trên, nếu tính compắc của không gian được thay bởi tính đầy đủ thì kết luận của định lý không còn đúng. Ví dụ sau đây chỉ rõ điều đó.

Ví dụ 2.1. Cho $X = [2, \infty)$ với mêtric thông thường $d(x, y) = |x - y|$ với mọi $x, y \in X$. Khi đó, (X, d) là không gian mêtric đầy đủ nhưng không phải là không gian compắc. Xét ánh xạ $T: X \to X$ xác định bởi $Tx = x + \frac{2}{x}$ với mọi $x \in X$. Khi đó, với $x, y \in X$ và $x \neq y$, ta có

$$d(Tx, Ty) = \left|x + \frac{2}{x} - y - \frac{2}{y}\right| = \left|1 - \frac{2}{xy}\right| |x - y| < |x - y| = d(x, y).$$

Như vậy, điều kiện (2.2) thoả mãn. Tuy nhiên, T không có điểm bất động.

Chú ý rằng, nếu $T: X \to X$ thoả mãn điều kiện (2), thì T liên tục trên X. Khi đó hàm số $f: X \to \boldsymbol{R}$ xác định bởi $f(x) = d(x, Tx)$, $x \in X$, là hàm số liên tục. Trong các chứng minh của Định lý 2.1, tính liên tục của f được sử dụng dựa trên thực tế rằng một hàm số liên tục f trên không gian compắc X đạt giá trị nhỏ nhất trên X. Năm 2009, Suzuki ([14]) đã chứng minh định lý sau đây.

Định lý 2.2. ([14]) Cho (X, d) là không gian mêtric compắc và $T: X \to X$ là một ánh xạ. Giả sử rằng

$$\frac{1}{2} d(x, Tx) < d(x, y) \Longrightarrow d(Tx, Ty) < d(x, y) \tag{3}$$

đúng với mọi $x, y \in X$. Khi đó, T có điểm bất động duy nhất trong X.

Điều kiện (3) được gọi là điều kiện co Suzuki. Trong [14], tác giả đưa ra ví dụ chỉ ra rằng ánh xạ $T: X \to X$ thoả mãn điều kiện (3) không nhất thiết liên tục. Tính compắc của không gian mêtric (X, d) trong Định lý 2.2 có thể thay bằng tính đầy đủ cùng với một điều kiện khác của ánh xạ T.

Định lý 2.3. ([13]) Cho (X, d) là một không gian mêtric đầy đủ và $T: X \to X$ là một ánh xạ. Giả sử với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho: với $x, y \in X$

nếu $(1/2)\, d(x, Tx) < d(x, y)$ và $d(x, y) < \varepsilon + \delta$, thì $d(Tx, Ty) \leq \varepsilon$, và

nếu $(1/2)\, d(x, Tx) < d(x, y)$, thì $d(Tx, Ty) < d(x, y)$.

Khi đó, T có điểm bất động duy nhất $z \in X$. Ngoài ra, $\lim_{n \to \infty} T^n x = z$ với mọi $x \in X$.

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số định lý điểm bất động mở rộng Định lý 2.1 cho các ánh xạ thỏa mãn điều kiện co suy rộng kiểu Edelstein. Trong các kết quả này không gian thỏa mãn điều kiện yếu hơn tính compắc và các ánh xạ không nhất thiết liên tục. Với mục đích đó, tiếp theo chúng tôi giới thiệu một số khái niệm.

Định nghĩa 2.1. ([4]) Một không gian mêtric (X, d) được gọi là compắc bị chặn nếu mọi dãy bị chặn trong X đều có một dãy con hội tụ.

Từ định nghĩa ta thấy rằng, mọi không gian compắc đều là compắc bị chặn, tuy nhiên một không gian compắc bị chặn thì không nhất thiết là không gian compắc. Chẳng hạn, tập số thực **R** với mêtric thông thường là không gian mêtric compắc bị chặn nhưng không compắc.

Định nghĩa 2.2. ([4]) Cho (X, d) là một không gian mêtric. Quỹ đạo của ánh xạ $T: X \to X$ tại $x \in X$ là tập được xác định bởi

$$O_x(T) = \{x, Tx, T^2x, T^3x, \dots\}.$$

Định nghĩa 2.3. ([4]) Cho (X, d) là một không gian mêtric và $T: X \to X$ là một ánh xạ. Không gian mêtric (X, d) được gọi là T-compắc quỹ đạo, nếu mọi dãy trong $O_x(T)$ đều có một dãy con hội tụ với mọi $x \in X$.

Từ định nghĩa ta thấy rằng, tính T-compắc quỹ đạo của một không gian phụ thuộc vào T.

Ví dụ 2.2. Cho $X = [0, \infty)$ với mêtric $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in X$. Xét hai ánh xạ T_1 và T_2 trên X xác định bởi

$$T_1x = \frac{x}{n+1} \text{ nếu } n - 1 \leq x < n \text{ và } T_2x = 2x$$

với mọi $x \in X$ và $n \in \mathbf{N}$. Khi đó, X là T_1-compắc quỹ đạo nhưng không là T_2-compắc quỹ đạo.

Ví dụ 2.3. Cho $X = [0,1)$ với mêtric $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in X$. Xét ánh xạ $T: X \to X$ xác định bởi $Tx = \frac{x}{2}$ mọi $x \in X$. Khi đó, X là T-compắc quỹ đạo nhưng không đầy đủ.

Ví dụ 2.4. Cho không gian mêtric (X, d) với $X = [0, \infty)$ và $d(x, y) = |x - y|$, với mọi $x, y \in X$. Xét ánh xạ $T: X \to X$ xác định bởi $Tx = 2x$, mọi $x \in X$. Khi đó, X là compắc bị chặn nhưng không phải là T-compắc quỹ đạo.

Định nghĩa 2.4. ([4]) Cho (X, d) là một không gian mêtric. Một ánh xạ $T: X \to X$ được gọi là liên tục quỹ đạo tại $z \in X$ nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subset O_x(T)$ với $x \in X$ thoả mãn $x_n \to z$ thì $Tx_n \to Tz$ khi $n \to \infty$. Nếu ánh xạ T liên tục quỹ đạo tại mọi $z \in X$, ta nói T liên tục quỹ đạo.

Từ định nghĩa ta thấy rằng, nếu $T: X \to X$ liên tục, thì nó liên tục quỹ đạo. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng.

Ví dụ 2.5. Cho $X = [0, \infty)$ với mêtric thông thường $d(x, y) = |x - y|$, mọi $x, y \in X$. Xét ánh xạ $T: X \to X$ xác định bởi

$$Tx = \begin{cases} 1, & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ x/5, & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$$

Khi đó, T liên tục quỹ đạo nhưng không liên tục.

3. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG KIỂU EDELSTEIN

Trong [6], Hardy và Rogers đã đưa ra và chứng minh kết quả về điểm bất động cho ánh xạ T trong không gian đầy đủ (X, d) thoả mãn điều kiện, được gọi là điều kiện Hardy - Rogers, như sau: với mọi $x, y \in X$,

$$d(Tx, Ty) \leq Ad(x, Tx) + Bd(y, Ty) + Cd(x, Ty) + Dd(y, Tx) + Ed(x, y),$$

trong đó A, B, C, D và E là các hằng số không âm thoả mãn một số điều kiện nhất định.

Trong phần này, kết hợp các điều kiện Suzuki và Hardy - Rogers, chúng tôi trình bày một số định lý điểm bất động cho ánh xạ thoả mãn điều kiện, được gọi là điều kiện Suzuki - Hardy - Rogers, trong không gian mêtric không nhất thiết compắc. Định lý đầu tiên được phát biểu như sau.

Định lý 3.1. Cho (X, d) là một không gian mêtric compắc bị chặn và $T: X \to X$ là một ánh xạ liên tục quỹ đạo. Giả sử tồn tại các số thực không âm A, B, C, D, E thoả mãn

$$A + B + C + 2D = 1, \qquad A + D + E < 1 \text{ và } C \neq 1,$$

sao cho $d(Tx, Ty) < Ad(x, y) + Bd(x, Tx) + Cd(y, Ty) + Dd(x, Ty) + Ed(y, Tx)$

với mọi $x, y \in X, x \neq y$. Khi đó, T có điểm bất động duy nhất trong X và với mọi $x \in X$, dãy lặp $\{T^n x\}$ hội tụ tới điểm bất động của T.

Chứng minh. Lấy điểm tùy ý $x_0 \in X$ rồi cố định và xây dựng dãy lặp $\{x_n\}$, với

$$x_n = T^n x_0, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $x_{n_0} = x_{n_0+1}$, thì x_{n_0} là một điểm bất động của T và dãy $\{x_n\}$ hội tụ tới x_{n_0}.

Giả sử rằng $x_n \neq x_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Khi đó, với mỗi $n \in \mathbf{N}$, đặt $s_n = d(x_n, x_{n+1})$. Khi đó, $s_n > 0$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Ta có

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= d(Tx_n, Tx_{n+1}) \\
&< Ad(x_n, x_{n+1}) + Bd(x_n, Tx_n) + Cd(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \\
&\quad + Dd(x_n, Tx_{n+1}) + Ed(x_{n+1}, Tx_n) \\
&= Ad(x_n, x_{n+1}) + Bd(x_n, x_{n+1}) + Cd(x_{n+1}, x_{n+2}) + Dd(x_n, x_{n+2}) \\
&\leq Ad(x_n, x_{n+1}) + Bd(x_n, x_{n+1}) + Cd(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&\quad + Dd(x_n, x_{n+1}) + Dd(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&= As_n + Bs_n + Cs_{n+1} + Ds_n + Ds_{n+1}.
\end{aligned}$$

Thu gọn lại ta được

$$(1 - C - D)s_{n+1} < (A + B + D)s_n. \tag{4}$$

Từ điều kiện $A + B + C + 2D = 1, C \neq 1$, suy ra $1 - C - D = A + B + D \neq 0$. Do đó, bất đẳng thức (4) dẫn tới $s_{n+1} < s_n$. Như vậy, $\{s_n\}$ là dãy số dương giảm nghiêm ngặt. Do đó, $\{s_n\}$ hội tụ tới một số thực $b \geq 0$. Ngoài ra, với mỗi $n \in \mathbf{N}$, ta có

$$s_n < s_{n-1} < \cdots < s_1 := K.$$

Từ điều kiện co của T, với mọi $n, m \in \mathbf{N}$, ta có

$$\begin{aligned}
t := d(x_n, x_m) &= d(Tx_{n-1}, Tx_{m-1}) \\
&< Ad(x_{n-1}, x_{m-1}) + Bd(x_{n-1}, x_n) + Cd(x_{m-1}, x_m) \\
&\quad + Dd(x_{n-1}, x_m) + Ed(x_{m-1}, x_n).
\end{aligned} \tag{5}$$

Do

$$\begin{aligned}
&Ad(x_{n-1}, x_{m-1}) \leq A[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_{m-1}, x_m)] < A(2K + t), \\
&Dd(x_{n-1}, x_m) \leq D[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_m)] < D(K + t), \\
&Ed(x_{m-1}, x_n) \leq E[d(x_{m-1}, x_m) + d(x_m, x_n)] < E(K + t),
\end{aligned}$$

kết hợp với (5), ta được $(1 - A - D - E)t < K(2A + B + C + D + E)$.

Vì $1 - A - D - E > 0$, ta thu được

$$d(x_n, x_m) < \frac{K(2A + B + C + D + E)}{1 - A - D - E}.$$

Điều này chứng tỏ, $\{x_n\}$ là một dãy bị chặn trong X. Do tính compắc bị chặn của X, nên $\{x_n\}$ phải có một dãy con, gọi là $\{x_{n_k}\}$, hội tụ tới $z \in X$. Do tính liên tục quỹ đạo của T, nên $\{Tx_{n_k}\}$ hội tụ tới Tz. Vì

$$s_{n_k} = d(x_{n_k}, Tx_{n_k}),$$
$$s_{n_k+1} = d(Tx_{n_k}, T^2x_{n_k}),$$

lấy giới hạn, khi $k \to \infty$, ta thu được

$$b = d(z, Tz) = d(Tz, T^2z). \tag{6}$$

Ta sẽ chứng minh $b = 0$. Giả sử $b > 0$. Khi đó, $z \neq Tz$ và

$$\begin{aligned} d(Tz, T^2z) &< Ad(z, Tz) + Bd(z, Tz) + Cd(Tz, T^2z) \\ &\quad + Dd(z, T^2z) + E\,d(Tz, Tz) \\ &\leq Ad(z, Tz) + Bd(z, Tz) + Cd(Tz, T^2z) \\ &\quad + Dd(z, Tz) + Dd(Tz, T^2z). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $(1 - C - D)d(Tz, T^2) < (A + B + D)d(z, Tz)$.

Từ giả thiết ta suy ra $1 - C - D = A + B + D \neq 0$. Vì thế từ bất đẳng thức cuối cùng ở trên ta có: $d(Tz, T^2z) < d(z, Tz)$.

Điều này mâu thuẫn với (6).

Vậy dãy $\{s_n\}$ phải hội tụ tới 0. Do đó , kết hợp với (3.2), ta thu được

$$(1 - A - D - E)d(x_n, x_m) < (A + B + D)s_{n-1} + (A + C + E)s_{m-1},$$

với mọi $n, m \in \mathbf{N}$. Điều này suy ra: $d(x_n, x_m) \to 0$, khi $m, n \to \infty$.

Vậy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Do dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ hội tụ tới z, nên $\{x_n\}$ phải hội tụ tới z. Do tính liên tục quỹ đạo của T, nên $\{Tx_n\}$ hội tụ tới Tz, mà $Tx_n = x_{n+1}$ nên từ tính duy nhất của giới hạn, ta phải có $z = Tz$, tức là, z là điểm bất động của T và dãy lặp $\{T^nx\}$ hội tụ tới z.

Tiếp theo, ta kiểm tra tính duy nhất của z. Giả sử có z' là điểm bất động khác của T, khi đó

$$\begin{aligned} d(z, z') &= d(Tz, Tz') \\ &< Ad(z, z') + Bd(z, Tz) + Cd(z', Tz') \\ &\quad + Dd(z, Tz') + Ed(z', Tz) \\ &= Ad(z, z') + Dd(z, z') + Ed(z, z'). \end{aligned}$$

Suy ra $(1 - A - D - E)d(z, z') < 0$, điều này mâu thuẫn vì $1 - A - D - E > 0$. Vậy z là điểm bất động duy nhất của T. Định lý được chứng minh.

Ta có một số hệ quả sau.

Hệ quả 3.1. Cho (X, d) là một không gian mêtric compắc bị chặn và $T: X \to X$ là một ánh xạ liên tục quỹ đạo. Giả sử tồn tại các số thực không âm A, B, C thoả mãn

$$A + B + C = 1, A < 1 \text{ và } C \neq 1,$$

sao cho $d(Tx, Ty) < Ad(x, y) + Bd(x, Tx) + Cd(y, Ty)$

với mọi $x, y \in X, x \neq y$. Khi đó, T có một điểm bất động duy nhất trong X và với mọi $x \in X$, dãy lặp $\{T^nx\}$ hội tụ tới điểm bất động của T.

Hệ quả sau đây là một kết quả được đưa ra trong [4].

Hệ quả 3.2. ([4]) Cho (X, d) là một không gian mêtric compắc bị chặn và $T: X \to X$ là một ánh xạ liên tục quỹ đạo. Giả sử

$$d(Tx, Ty) < \frac{1}{2}\,[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

với mọi $x, y \in X, x \neq y$. Khi đó, T có một điểm bất động duy nhất trong X và với mọi $x \in X$, dãy lặp $\{T^n x\}$ hội tụ tới điểm bất động của T.

Trong định lý sau đây, tính compắc bị chặn được thay bằng tính T-compắc quỹ đạo.

Định lý 3.2. Cho (X, d) là một không gian mêtric và $T: X \to X$ là một ánh xạ liên tục quỹ đạo. Giả sử tồn tại các số thực không âm A, B, C, D, E thoả mãn

$$A + B + C + 2D = 1, \qquad A + D + E < 1 \text{ và } C \neq 1,$$

sao cho $d(Tx, Ty) < Ad(x, y) + Bd(x, Tx) + Cd(y, Ty) + Dd(x, Ty) + Ed(y, Tx)$

với mọi $x, y \in X, x \neq y$. Nếu (X, d) là không gian T-compắc quỹ đạo, thì T có một điểm bất động duy nhất trong X và với mọi $x \in X$, dãy lặp $\{T^n x\}$ hội tụ tới điểm bất động của T.

Chứng minh. Lấy điểm tùy ý $x_0 \in X$ rồi cố định nó và xây dựng dãy lặp $\{x_n\}$ bởi $x_n = T^n x_0$ với mọi $n \in \mathbf{N}$.

Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $x_{n_0} = x_{n_0+1}$, thì x_{n_0} là điểm bất động của T và dãy $\{x_n\}$ hội tụ tới x_{n_0}.

Giả sử rằng $x_n \neq x_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Với mỗi $\in \mathbf{N}$, đặt $s_n = d(x_n, x_{n+1})$. Tương tự như trong chứng minh của Định lý 3.1, ta có thể chứng minh được rằng $\{s_n\}$ là dãy số thực dương giảm nghiêm ngặt nên nó phải hội tụ tới số thực $b \geq 0$.

Do X là T- compắc quỹ đạo, nên dãy $\{x_n\}$ có một dãy con hội tụ, gọi dãy con đó là $\{x_{n_k}\}$, và giả sử $\{x_{n_k}\}$ hội tụ tới z trong X. Do tính liên tục quỹ đạo của T, dãy $\{Tx_{n_k}\}$ hội tụ tới Tz. Tiếp tục quá trình như trong chứng minh của Định lý 3.1, ta chứng minh được z là điểm bất động duy nhất của T và $\{T^n x\}$ hội tụ tới z với mỗi $x \in X$.

Hệ quả 3.3. ([4]). Cho (X, d) là một không gian T-compắc quỹ đạo, ở đây $T: X \to X$ là một ánh xạ liên tục quỹ đạo thoả mãn

$$d(Tx, Ty) < \frac{1}{2}\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\}$$

với mọi $x, y \in X$ và $x \neq y$. Khi đó, T có một điểm bất động duy nhất z trong X và với mọi $x \in X$, dãy lặp $\{T^n x\}$ hội tụ tới z.

Định lý tiếp theo là một mở rộng của Định lý 2.3.

Định lý 3.3. Cho (X, d) là một không gian mêtric đầy đủ và $T: X \to X$ là một ánh xạ. Giả sử

i) tồn tại các số thực không âm A, B, C, D, E thoả mãn

$$A + B + C + 2D = 1 \text{ và } C \neq 1,$$

sao cho

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y) \tag{7}$$
$$\Rightarrow d(Tx, Ty) < Ad(x, y) + Bd(x, Tx) + Cd(y, Ty) + Dd(x, Ty) + Ed(y, Tx)$$

với mọi $x, y \in X$.

ii) với mọi $x \in X$ và $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $d(T^i x, T^j x) < \varepsilon + \delta$ dẫn tới $d(T^{i+1}x, T^{j+1}x \leq \varepsilon$ với mọi $i, j \in \mathbf{N}$.

Khi đó, T có một điểm bất động trong X. Ngoài ra nếu, $E < B + C + D$, thì T có điểm bất động duy nhất $z \in X$ và $\{T^n x\}$ hội tụ tới z với mọi $x \in X$.

Chứng minh. Lấy điểm tùy ý $x \in X$ rồi cố định nó và xét dãy $\{x_n\}$ trong X xác định bởi $x_n = T^n x \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $x_{n_0} = x_{n_0+1}$, thì x_{n_0} là điểm bất động của T và dãy $\{x_n\}$ hội tụ tới x_{n_0}. Giả sử $x_n \neq x_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Khi đó, với mỗi $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{1}{2}d(x_n, Tx_n) = \frac{1}{2}d(x_n, x_{n+1}) < d(x_n, x_{n+1}).$$

Theo (i), ta có

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(Tx_n, Tx_{n+1}) \\ &< Ad(x_n, x_{n+1}) + Bd(x_n, Tx_n) + Cd(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \\ &\quad + Dd(x_n, Tx_{n+1}) + Ed(x_{n+1}, Tx_n) \\ &= Ad(x_n, x_{n+1}) + Bd(x_n, x_{n+1}) + C(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &\quad + Dd(x_n, x_{n+1}) + Dd(x_{n+1}, x_{n+2}). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $(1 - C - D)d(x_{n+1}, x_{n+2}) < (A + B + D)d(x_n, x_{n+1})$,

Do $A + B + C + 2D = 1$ nên $A + B + D = 1 - C - D$. Ngoài ra, do $C \neq 1$, nên $A + B + D = 1 - C - D \neq 0$. Do đó ta có $d(x_{n+1}, x_{n+2}) < d(x_n, x_{n+1})$.

Như vậy, $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ là một dãy số dương giảm nghiêm ngặt. Do đó, tồn tại $\alpha \geq 0$ sao cho $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \alpha$.

Ta sẽ chứng minh $\alpha = 0$. Thật vậy, giả sử $\alpha > 0$. Khi đó, $d(x_n, x_{n+1}) > \alpha$ với mọi n. Hơn nữa, tồn tại $\delta > 0$ và $N \in \mathbf{N}$ sao cho

$$d(T^n x, T^{n+1}x) = d(x_n, x_{n+1}) < \alpha + \delta \tag{8}$$

với mọi $n \geq N$.

Do điều kiện (ii), từ (8) suy ra $d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(T^{n+1}x, T^{n+2}x) \leq \alpha$

với mọi $n \geq N$. Điều này mâu thuẫn. Vậy $\alpha = 0$.

Tiếp theo, ta chứng minh $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy. Lấy tuỳ ý $\varepsilon > 0$ rồi cố định nó và lấy $\delta > 0$ cố định. Từ $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$, tồn tại $p \in \mathbf{N}$ sao cho $d(x_n, x_{n+1}) < \delta$ với mọi $n \geq p$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng

$$d\left(x_{p+1}, x_{p+m}\right) \leq \varepsilon \tag{9}$$

với mọi $m \in \mathbf{N}$.

Rõ ràng (9) đúng với $m = 1$. Giả sử (9) đúng đến $m \geq 1$. Ta có

$$d\left(x_p, x_{p+m}\right) \leq d\left(x_p, x_{p+1}\right) + d\left(x_{p+1}, x_{p+m}\right) < \varepsilon + \delta.$$

Theo điều kiện (ii), ta có $d\left(x_{p+1}, x_{p+m+1}\right) = d\left(Tx_p, T\right) \leq \varepsilon$. Tức là (9) đúng với $m + 1$. Do đó, (9) đúng với mọi $m \in \mathbf{N}$. Điều này suy ra dãy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Do X là không gian đầy đủ nên dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $z \in X$.

Ta chứng minh z là điểm bất động của T. Giả sử tồn tại $n \in \mathbf{N}$ sao cho

$$\frac{1}{2}d(x_n, x_{n+1}) \geq d(x_n, z) \quad \text{và} \quad \frac{1}{2}d(x_{n+1}, x_{n+2}) \geq d(x_{n+1}, z).$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq d(x_n, z) + d(x_{n+1}, z) \\ &\leq \frac{1}{2}[d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})] \\ &< d(x_n, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Điều này là không thể xảy ra. Do đó, một trong hai trường hợp sau xảy ra:

Trường hợp 1: $\frac{1}{2}d(x_n, x_{n+1}) < d(x_n, z)$ với mọi n nằm trong tập con vô hạn I của **N.**

Do điều kiện (i), ta có với mọi $n \in I$ thì

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, Tz) &= d(Tx_n, Tz) \\ &< Ad(x_n, z) + Bd(x_n, Tx_n) + Cd(z, Tz) \\ &\quad + Dd(x_n, Tz) + Ed(z, Tx_n) \\ &= Ad(x_n, z) + Bd(x_n, x_{n+1}) + Cd(z, Tz) \\ &\quad + Dd(x_n, Tz) + Ed(z, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$ $(n \in I)$, ta được $d(z, Tz) \leq (C + D)d(z, Tz)$.

Do $C + D < 1$, ta có $d(z, Tz) = 0$, tức là $Tz = z$.

Trường hợp 2: $\frac{1}{2}d(x_{n+1}, x_{n+2}) < d(x_{n+1}, z)$ với mọi n nằm trong một tập con vô hạn J của **N**. Lập luận tương tự như trường hợp 1, ta cũng thu được $Tz = z$. Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều có z là điểm bất động của T và dãy lặp $\{T^n x\}$ hội tụ tới z.

Khi $E < B + C + D$, ta dễ dàng chứng minh được T có điểm bất động duy nhất.

Khi cho A, B, C, D và E bằng các giá trị đặc biệt, ta thu được các hệ quả tương ứng. Chẳng hạn, ta có hệ quả sau.

Hệ quả 3.4. Cho (X, d) là một không gian mêtric đầy đủ và $T: X \to X$ là một ánh xạ. Giả sử

i)tồn tại các số thực không âm A, B, C, D thỏa mãn $A + B + C + 2D = 1$ và $C \neq 1$ sao cho

$$d(Tx, Ty) < Ad(x, y) + Bd(x, Tx) + Cd(y, Ty) + Dd(x, Ty), \forall x, y \in X, x \neq y.$$

ii) với mọi $x \in X$ và $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $d(T^i x, T^j x) < \varepsilon + \delta$ dẫn tới $d(T^{i+1}x, T^{j+1}x) \leq \varepsilon$ với mọi $i, j \in N$.

Khi đó, T có duy nhất điểm bất động z trong X và với mỗi $x \in X$, dãy lặp $\{T^n x\}$ hội tụ tới z.

4. KẾT LUẬN

Bài báo trình bày một số kết quả về điểm bất động cho ánh xạ không liên tục thoả mãn các điều kiện co kiểu Edelstein trong không gian mêtric. Các kết quả này mở rộng một số kết quả gần đây trong lý thuyết điểm bất động cho các ánh xạ thỏa mãn điều kiện co chặt, trong không gian mêtric không compắc. Một trong những hướng nghiên cứu trong tương lai là mở rộng các kết quả đã trình bày trong bài báo này cho các ánh xạ đa trị trong các không gian kiểu mêtric.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Ciric, L. B. (1974), *A generalization of Banach principle*, Proc. Am. Math. Soc., 45, 727 - 730.

[2] Edelstein M. (1962), *On fixed and periodic points under contractive mappings*, J. Lond. Math. Soc., 37, 74 - 79.

[3] Đoric D., Kadelburg Z., Radenovic S. (2012), *Edelstein–Suzuki-type fixed point results in metric and abstract metric spaces*, Nonlinear Anal. TMA., 75, 1927 - 932.

[4] Garai H., Dey L. K., Senapati T. (2018), *On Kannan - type contractive mappings*, Numer. Funct. Anal. Optim., 39, 1466 - 1476.

[5] Garai H., Dey L. K., Cho Y. J. (2020), *On contractive mappings and discontinuity at fixed points*, Appl. Anal. Discrete Math., 14, 033 - 054.

[6] Hardy G. E., Rogers T.D. (1973), *A generalization of a fixed point theorem of Reich*, Canad. Math. Bull., 16, 201 - 206.

[7] Kannan, R. (1968), *Some results on fixed points*, Bull.Cal.Math.Soc., 60, 71-76.

[8] Rhoades B.E. (1977), *A comparison of various definitions of contractive mappings*, Trans. Amer. Math. Soc., 226, 257 - 290.

[9] Rhoades B.E. (1988), *Contractive definitions and continuity*, Contemp. Math., 72, 233 - 245.

[10] Reich, S. (1971), *Kannan's fixed point theorem*, Boll. Unione Mat. Ital., 4, 1 - 11.

[11] Pant R.P. (1999), *Discontinuity and fixed points*, J. Math. Anal. Appl., 240, 284 - 289.

[12] Shirali S., Vasudeva H. L. (2006), *Metric spaces*, Springer-Verlag London.

[13] Suzuki T. (2008), *A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness*, Proc. Amer. Math. Soc., 136, 1861 - 1869.

[14] Suzuki T. (2009), *A new type of fixed point theorem in metric spaces*, Nonlinear Anal. TMA., 71, 5313 - 5317.

SOME FIXED POINT THEOREMS OF EDELSTEIN-TYPE FOR DISCONTINUOUS MAPPINGS IN METRIC SPACES

Nguyen Van Luong, Hoang Thi Hung

ABSTRACT

In this paper, we introduce fixed point theorems for discontinuous maps that satisfy contractive contractions of Edelstein - type in metric spaces.

Keywords: *Fixed points, orbitally continuous, orbitally compact, boundedly compact.*

** Ngày nộp bài: 13/6/2023; Ngày gửi phản biện: 25/6/2023; Ngày duyệt đăng: 10/12/2023*