IĐÊAN ĐƠN THỨC KHÔNG CHỨA BÌNH PHƯƠNG VÀ PHỨC ĐƠN HÌNH

Lê Xuân Dũng[1], Trần Duy Nguyên[2]

TÓM TẮT

Bài báo trình bày chứng minh chi tiết về phân tích của iđêan đơn thức không chứa bình phương theo phức mặt và phức không mặt được S. Faradi đưa ra trong thảo luận năm 2005.

Từ khóa: *Iđêan không chứa bình phương, iđêan mặt, iđêan không mặt (iđêan Stanley-Reiner), phức đơn hình, phức mặt, phức không mặt (phức Stanley-Reiner).*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Cho $R = k[x_1,...,x_n]$ là vành đa thức n biến $x_1,...,x_n$ trên trường k. Ta biết rằng với mỗi iđêan đơn thức I sinh bởi các đơn thức không chứa bình phương (gọi tắt là iđêan đơn thức không chứa bình phương) đều xác định được phức đơn hình tương ứng, đồng thời cấu trúc tổ hợp của phức đơn hình cũng ảnh hưởng đến tính chất đại số của iđêan đơn thức I. Do đó, việc phân tích mối liên hệ giữa I và phức đơn hình tương ứng là vấn đề được nhiều người quan tâm. Bài báo hệ thống và trình bày chi tiết các chứng minh về mối liên hệ giữa iđêan đơn thức không chứa bình phương với phức mặt và phức không mặt tương ứng được trình bày sơ lược trong phần thảo luận [3, Discussion 2.13].

Ngoài phần giới thiệu, bài báo chia thành hai mục. Mục 2 giới thiệu một số kiến thức cơ bản về iđêan đơn thức không chứa bình phương và phức đơn hình. Mục 3 trình bày các kết quả chính của bài báo, trước hết là phân tích iđêan mặt và không mặt (Mệnh đề 3.2), từ đó suy ra được phân tích của iđêan không chứa bình phương theo phức mặt và phức không mặt tương ứng của I (Định lý 3.4).

2. PHỨC ĐƠN HÌNH

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu về phức đơn hình, iđêan mặt, iđêan không mặt (iđêan Stanley- Reisner) dựa trên các tài liệu [1], [2] và [3] và luôn giả thiết $R = k[x_1,...,x_n]$ là vành đa thức n biến $x_1,...,x_n$ trên trường k.

Định nghĩa 2.1. (Xem [3]) Một phức đơn hình trên một tập hợp các đỉnh $V = \{v_1,...,v_n\}$ là một tập hợp các tập hợp con của V sao cho $\{v_i\} \in \Delta$ và nếu $F \in \Delta$ thì mọi tập con của F cũng thuộc Δ (bao gồm cả tập hợp rỗng).

[1] *Trung tâm Giáo dục thường xuyên, Trường Đại học Hồng Đức; Email: lexuandung@hdu.edu.vn*
[2] *Học viên lớp cao học K14 Đại số, khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

Kí hiệu $FC(\Delta)$ là tập các mặt cực đại của Δ và $f(\Delta)$ là tập hợp tất cả các mặt của Δ. Từ định nghĩa trên ta thấy, để xác định một phức đơn hình Δ ta chỉ cần xác định tập các mặt cực đại $FC(\Delta)$ của Δ . Giả sử $FC(\Delta)=\left\{F_1,F_2,\ldots,F_q\right\}$ khi đó ta viết $\Delta=\left\langle F_1,F_2,\ldots,F_q\right\rangle$.

Định nghĩa 2.2. (Xem [3]) Phức đơn hình con Δ' của phức đơn hình Δ là một phức đơn hình có tập các mặt cực đại là tập con của tập các mặt cực đại của phức đơn hình Δ, nghĩa là $FC(\Delta')\subseteq FC(\Delta)$.

Định nghĩa 2.3. (Xem [3]) Cho Δ là phức đơn hình có tập đỉnh là $\left\{v_1,...,v_n\right\}$, k là một trường và $R=k\left[x_1,...,x_n\right]$ là vành đa thức n biến $x_1,...,x_n$.

a) Kí hiệu $\mathcal{F}(\Delta)$ là iđêan của R sinh bởi tất cả đơn thức không chứa bình phương $x_{i_1},...,x_{i_s}$, trong đó $\left\{v_{i_1},....,v_{i_s}\right\}$ là một mặt của Δ , nghĩa là

$$\mathcal{F}(\Delta)=\left(x_{i_1},...,x_{i_s} \mid \left\{v_{i_1},...,v_{i_s}\right\}\in\Delta\right)$$

và gọi là iđêan mặt của Δ.

b) Kí hiệu $\mathcal{N}(\Delta)$ là iđêan của R sinh bởi tất cả các đơn thức không chứa bình phương $x_{i_1},...,x_{i_s}$, trong đó $\left\{v_{i_1},....,v_{i_s}\right\}$ không phải là một mặt của Δ, nghĩa là

$$\mathcal{N}(\Delta)= x_{i_1},...,x_{i_s} \,\Big|\, v_{i_1},...,v_{i_s} \notin \Delta$$

và gọi là iđêan không mặt (iđêan Stanley-Reiner) của Δ.

Tập sinh tối tiểu của iđêan $\mathcal{N}(\Delta)$ bao gồm các đơn thức $x_{i_1},...,x_{i_s}$ sao cho $\left\{v_{i_1},....,v_{i_s}\right\}$ là không mặt nhỏ nhất theo quan hệ bao hàm của Δ. Do đó, khi tìm iđêan $\mathcal{N}(\Delta)$, ta chỉ cần liệt kê tất cả các không mặt nhỏ nhất của Δ.

Định nghĩa 2.4. (Xem [3]) Cho $I=(m_1,...,m_q)$ là một iđêan đơn thức không chứa bình phương trong vành đa thức $k\ x_1,...,x_n$, trong đó $m_1,...,m_q$ là các đơn thức không chứa bình phương và là hệ sinh tối tiểu của I .

a) Kí hiệu $\delta_{\mathcal{F}}(I)$ là phức đơn hình trên một tập đỉnh $v_1,...,v_n$ có mặt cực đại là $F_1,...,F_q$, trong đó với mỗi i, $F_i=\ v_j \,\Big|\, x_j \mid m_i, 1\leq j\leq n$ và gọi là phức mặt của I .

b) Kí hiệu $\delta_{\mathcal{N}}(I)$ là phức đơn hình trên một tập đỉnh $v_1,...,v_n$, trong đó $\left\{v_{i_1},....,v_{i_s}\right\}$ là một mặt của $\delta_{\mathcal{N}}(I)$ khi và chỉ khi $x_{i_1},...,x_{i_s}\notin I$ và gọi là phức không mặt hay còn gọi là phức Stanley-Reiner của I .

Từ các khái niệm trên, ta có tương ứng 1-1 giữa các phức đơn hình và các iđêan đơn thức không chứa bình phương. Nghĩa là, Cho I là một iđêan của $R = k\ \ x_1,...,x_n$, các đỉnh của $\delta_{\mathcal{F}}(I)$ là các biến mà các biến này là ước của các đơn thức sinh của I, tập này không nhất thiết phải bao gồm tất cả các biến $x_1,...,x_n$, tức là tập này là tập con của tập $x_1,...,x_n$. Từ tính chất

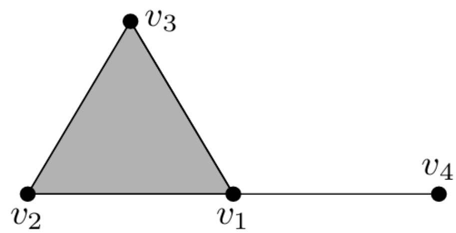
$$\frac{k\ \ x_1, x_2,..., x_n, t_1,..., t_k}{t_1,..., t_k} \cong k\ \ x_1,..., x_n\ \ ,$$

ta nhận thấy một số biến khác thêm vào trong vành đa thức sẽ không làm ảnh hưởng đến cấu trúc đại số và cấu trúc tổ hợp của $\delta_{\mathcal{F}}(I)$. Hay nói cách khác, nếu Δ là một phức đơn hình, ta có thể xem xét các iđêan mặt, không mặt của các phức đơn hình con như là các iđêan trong cùng một vành đa thức.

Ví dụ 2.5. Cho phức đơn hình Δ như hình 1. Ta có

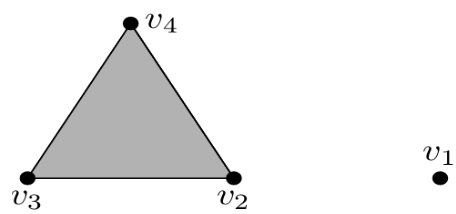
$$\mathcal{N}(\Delta) = (x_2x_4, x_4x_3),\ \ \mathcal{F}(\Delta) = (x_1x_2x_3, x_1x_4)$$

là các iđêan của vành $k\ \ x_1, x_2, x_3, x_4$.



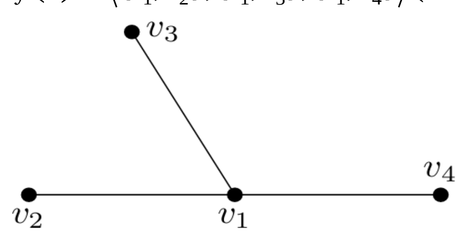
Hình 1

Ví dụ 2.6. Cho $I = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4)$ là iđêan của vành đa thức $k[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Khi đó, phức $\delta_{\mathcal{N}}(I)$ có các mặt cực đại là $\{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4\}$ ứng với các đơn thức không thuộc I là x_1, $x_2x_3x_4$, nên $\delta_{\mathcal{N}}(I) = \langle \{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4\} \rangle$ (Hình 2).



Hình 2

Phức $\delta_{\mathcal{F}}(I)$ có các mặt cực đại $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}$ ứng với các đơn thức thuộc I là x_1x_2, x_1x_3, x_3x_4, nên $\delta_{\mathcal{F}}(I) = \langle \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\} \rangle$ (hình 3).



Hình 3

Định nghĩa 2.7. (Xem [3]) Cho Δ là phức đơn hình có tập đỉnh V và các mặt cực đại là $F_1,...,F_q$. Một phủ đỉnh của phức đơn hình Δ là một tập con A của V sao cho với mọi mặt cực đại F_i đều tồn tại một đỉnh của F_i thuộc A. Phủ đỉnh tối tiểu của Δ là một tập con A của V không có một tập con thực sự nào là phủ đỉnh của Δ. Tập các phủ đỉnh tối tiểu của Δ, kí hiệu là $\mathcal{P}\ \ \Delta$.

Ví dụ 2.8. a) Cho phức đơn hình Δ như hình 1 trong ví dụ 2.5. Tập các phủ đỉnh tối tiểu của là Δ là $\mathcal{P}\ \Delta = \ \ v_1\ ,\ v_2,v_4\ ,\ v_3,v_4\ \ $.

b) Cho phức đơn hình $\delta_{\mathcal{F}}(I)$ như hình 3 trong ví dụ 2.6. Tập các phủ đỉnh tối tiểu của là $\delta_{\mathcal{F}}(I)$ là $\mathcal{P}\ \delta_{\mathcal{F}}(I) = \ \ v_1\ ,\ v_2,v_3,v_4\ \ $.

Một phân tích của iđêan I có dạng $I = \bigcap_{i=1}^{t} Q_i$ được gọi là phân tích rút gọn nếu không bỏ đi được bất kì iđêan $Q_k\ \ 1 \le k \le t$ nào trong giao $\bigcap_{i=1}^{t} Q_i$, nghĩa là $\bigcap_{i=1}^{t} Q_i \subsetneq \bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{t} Q_i$. Trong trường hợp I là iđêan không chứa bình phương, ta có thể xác định được cấu trúc của các iđêan $Q_i\ \ 1 \le i \le t$ như sau:

Bổ đề 2.9. (Xem [2]) Cho $I = \ m_1,...,m_q$ là iđêan đơn thức không chứa bình phương trong $k\ \ x_1,...,x_n$. Khi đó, I có phân tích rút gọn $I = \bigcap_{i=1}^{t} Q_i$, trong đó Q_i có dạng $\ x_{i_1},...,x_{i_t}\ $.

3. PHÂN TÍCH IĐÊAN ĐƠN THỨC KHÔNG CHỨA BÌNH PHƯƠNG

Trong mục này, chúng tôi trình bày phân tích của iđêan đơn thức không chứa bình phương dựa trên phần thảo luận trong [3].

Bổ đề 3.1. Cho $I = \ m_1,...,m_q$ là iđêan đơn thức không chứa bình phương trong $k\ \ x_1,...,x_n$ với $\ m_1,...,m_q$ là hệ sinh tối tiểu của I. Đặt V là tập các biến, mà các biến đó là ước của một đơn thức trong hệ $\ m_1,...,m_q\ $. Khi đó, $F \in FC(\delta_{\mathcal{N}}(I))$ khi và chỉ khi $V \setminus F \in \mathcal{P}(\delta_{\mathcal{F}}(I))$.

Chứng minh.

$"\Rightarrow"$ Giả sử $F = \ v_1,...,v_i\ \in FC(\delta_{\mathcal{N}}(I))$. Khi đó, $x_1...x_i \notin I$ và ta nhận được $V \setminus F = \ v_{i+1},...,v_n$. Giả sử $V \setminus F$ không phải là một phủ đỉnh của $\delta_{\mathcal{F}}(I)$. Khi đó, tồn tại mặt cực đại của $\delta_{\mathcal{F}}(I)$ không có đỉnh nào thuộc $V \setminus F$. Giả sử F_t không có đỉnh nào thuộc $V \setminus F$, suy ra các đơn thức không chứa bình phương m_t không chứa các biến $x_{i+1},...,x_n$ hay tập m_t có các biến thuộc tập $\ x_1,...,x_i\ $. Do đó, $m_t \mid x_1....x_i$ và suy ra $x_1...x_i \in I$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $x_1,...,x_i \notin I$. Do đó, $V \setminus F$ là một phủ đỉnh của $\delta_{\mathcal{F}}(I)$.

Giả sử có một tập A là tập con thực sự của $V\setminus F$ là phủ đỉnh của $\delta_{\mathcal{F}}(I)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $A= \ v_{i+2},...,v_n$. Giả sử $x_1...x_{i+1} \in I$, nghĩa là tồn tại $m_t \mid x_1...x_{i+1}$, mặt khác do A là phủ đỉnh của $\delta_{\mathcal{F}}(I)$, nên $F_1, F_2,..., F_q$ đều chứa ít nhất một đỉnh thuộc A, nghĩa là các đơn thức $m_1, m_2,..., m_q$ đều chứa ít nhất 1 biến thuộc tập $x_{i+2},..., x_n$ hay $m_t \nmid x_1...x_{i+1}$, mâu thuẫn với $m_t \mid x_1...x_{i+1}$. Suy ra $x_1...x_{i+1} \notin I$. Do đó, $F'= \ v_1,...,v_{i+1}$ là một mặt của phức $\delta_{\mathcal{N}}(I)$ thực sự chứa F . Điều này mâu thuẫn với F là mặt cực đại . Vậy $V \setminus F \in \mathcal{P}(\delta_{\mathcal{F}}(I))$.

"$\Leftarrow$" Giả sử cho $F \subset V$ sao cho $V \setminus F \in \mathcal{P}(\delta_{\mathcal{F}}(I))$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $F= \ v_1,...,v_i$, khi đó $V \setminus F= \ v_{i+1},...,v_n$. Giả sử $x_1...x_i \in I$. Khi đó, tồn tại m_t là ước của $x_1...x_i$. Suy ra tập các biến của m_t là tập con của $x_1,...,x_i$. Khi đó, $F_t \subseteq \ v_1,...,v_i$, nên mặt F_t không có đỉnh nào thuộc $V\setminus F$, mâu thuẫn với $V \setminus F \in \mathcal{P}(\delta_{\mathcal{F}}(I))$. Suy ra $x_1,..., x_i \notin I$, hay F là một mặt của $\delta_{\mathcal{N}}(I)$.

Giả sử F' là một mặt của $\delta_{\mathcal{N}}(I)$ thực sự chứa F . Ta có $x_1...x_{i+1} \notin I$. Không mất tính tổng quát, giả sử $F'= \ v_1,...,v_{i+1}$. Theo chứng minh ở phần thuận, $V\setminus F'= \ v_{i+2},...,v_n$ là một phủ đỉnh của $\delta_{\mathcal{F}}(I)$. Do $V\setminus F'$ là một tập con thực sự của $V\setminus F$ nên mâu thuẫn với $V\setminus F$ là phủ đỉnh tối tiểu của $\delta_{\mathcal{F}}(I)$. Do đó F là một mặt cực đại của $\delta_{\mathcal{N}}(I)$ hay $F \in FC(\delta_{\mathcal{N}}(I))$.

Vậy bổ đề được chứng minh.

Mệnh đề 3.2. (Xem [1, Theorem 5.1.4]) *Cho Δ là một phức đơn hình , $FC(\Delta)$ là tập các mặt cực đại của Δ và $\mathcal{P}\ \ \Delta$ là tập tất cả các phủ đỉnh tối tiểu của Δ. Khi đó, ta có phần tích của iđêan không mặt $\mathcal{N}(\Delta)$ và iđêan mặt $\mathcal{F}(\Delta)$ như sau*

a) $\mathcal{N}(\Delta)=\bigcap\limits_{F\in FC\ \ \Delta} P_F$ *, trong đó* $P_F=(x_i \mid v_i \notin F)$.

b) $\mathcal{F}\ \ \Delta\ =\bigcap\limits_{v_{i_1},...,v_{i_s}\ \ \in\mathcal{P}\ \ \Delta} x_{i_1},..., x_{i_s}$.

Chứng minh.

Do $\mathcal{N}(\Delta)$ và $\mathcal{F}(\Delta)$ là các iđêan đơn thức không chứa bình phương nên theo Bổ đề 2.9 thì $\mathcal{N}(\Delta)$ và $\mathcal{F}(\Delta)$ đều có phân tích thành giao của các iđêan có dạng $\cap P$, trong đó P là các iđêan đơn thức sinh bởi các biến.

a) Ta cần chứng minh $P= \ x_{j_1},..., x_{j_t}$ là iđêan nguyên tố tối tiểu (theo quan hệ bao hàm) chứa $\mathcal{N}(\Delta)$ khi và chỉ khi $v_1,...,v_n \ \setminus \ v_{j_1},...,v_{j_t}$ là một mặt cực đại của Δ.

"$\Rightarrow$" Không mất tính tổng quát, ta giả sử $P = \langle x_1,...,x_i \rangle$ là iđêan nguyên tố tối tiểu chứa $\mathcal{N}(\Delta)$. Giả sử $\{v_{i+1},...,v_n\} \notin \Delta$. Khi đó, $x_{i+1}...x_n \in \mathcal{N}(\Delta)$, suy ra $x_{i+1}...x_n \in \langle x_1,...,x_i \rangle = P$, điều này không xảy ra vì các biến $x_1,...,x_i$ đều không phải là ước của $x_{i+1}...x_n$. Do đó $\{v_{i+1},...,v_n\} \in \Delta$.

Không mất tính tổng quát, ta có có thể giả sử $\{v_i,...,v_n\}$ là một mặt của Δ thực sự chứa $\{v_{i+1},...,v_n\}$. Khi đó ta có $\{v_1,...,v_{i-1}\} \notin \Delta$ và iđêan nguyên tố $P' = (x_1,...,x_{i-1})$ chứa $\mathcal{N}(\Delta)$ nằm trong thực sự $P = \langle x_1,...,x_i \rangle$. Điều này mâu thuẫn với tính tối tiểu của P. Do đó

$$\{v_1,...,v_n\} \setminus \{v_i,...,v_n\} = \{v_{i+1},...,v_n\} \in FC(\Delta).$$

"$\Leftarrow$"Không mất tính tổng quát, giả sử $\{v_{i+1},...,v_n\}$ là mặt cực đại của Δ. Ta cần chứng minh $P := (x_1,...,x_i)$ là iđêan nguyên tố tối tiểu chứa $\mathcal{N}(\Delta)$. Giả sử P không chứa $\mathcal{N}(\Delta)$, nghĩa là tồn tại đơn thức $x_{j_1}...x_{j_s} \in \mathcal{N}(\Delta)$ nhưng $x_{j_1}...x_{j_s} \notin P$. Điều này suy ra $(x_{j_1},...,x_{j_s})$ không chứa các biến $x_1,...,x_i$, nghĩa là $\{v_{j_1},...,v_{j_s}\} \subset V \setminus \{v_1,...,v_n\}$ hay $\{v_{j_1},...,v_{j_s}\} \subset \{v_{i+1},...,v_n\}$, do $\{v_{i+1},...,v_n\}$ là mặt của Δ nên $\{v_{j_1},...,v_{j_s}\} \in \Delta$. Mặt khác do $x_{j_1}...x_{j_s} \in \mathcal{N}(\Delta)$ nên $\{v_{j_1}...v_{j_s}\} \notin \Delta$. Đây là điều vô lý. Vì vậy, P là iđêan nguyên tố chứa $\mathcal{N}(\Delta)$

Giả sử có iđêan P' sinh bởi các biến thực sự nằm trong P và chứa iđêan $\mathcal{N}(\Delta)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $P' := \langle x_1,...,x_{i+1} \rangle \supset \mathcal{N}(\Delta)$. Theo lập luận trên ở phần thuận ta có $\{v_i, v_{i+1},...,v_n\} \in \Delta$ mà $\{v_i,...,v_n\} \supset \{v_{i+1},...,v_n\}$, mâu thuẫn với tính cực đại của $\{v_{i+1},...,v_n\}$. Do đó $\langle x_1,...,x_i \rangle$ là iđêan nguyên tố tối tiểu chứa $\mathcal{N}(\Delta)$.

Vậy $\mathcal{N}(\Delta) = \bigcap_{F \in FC(\Delta)} P_F$, $P_F = \langle x_i \mid v_i \notin F \rangle$.

b) Ta cần chứng minh iđêan đơn thức nguyên tố tối tiểu $P = \langle x_{i_1},...,x_{i_s} \rangle$ chứa iđêan $\mathcal{F}(\Delta)$ khi và chỉ khi $\{v_{i_1},...,v_{i_s}\} \in \mathcal{P}(\Delta)$.

"$\Rightarrow$" Giả sử iđêan đơn thức nguyên tố tối tiểu $P = \langle x_{i_1},...,x_{i_s} \rangle$ chứa iđêan $\mathcal{F}(\Delta)$. Đặt, $\mathcal{F}(\Delta) = \langle m_1,...,m_q \rangle$ ứng với $FC(\Delta) = \{F_1,...,F_q\}$. Giả sử $\{v_{i_1},...,v_{i_s}\}$ không phải là phủ đỉnh của Δ. Khi đó, tồn tại $F_t \in FC(\Delta)$ không có đỉnh nào thuộc $\{v_{i_1},...,v_{i_s}\}$, nghĩa là $F_t = \{v_{t_1},...,v_{t_j}\} \subset V \setminus \{v_{i_1},...,v_{i_s}\}$. Do đó $\{x_{t_1},...,x_{t_j}\} \subset \{x_1,...,x_n\} \setminus \{x_{i_1},...,x_{i_s}\}$ hay $m_t = x_{t_1}...x_{t_j} \in \mathcal{F}(\Delta)$ không chia hết cho các biến $x_{i_1},...,x_{i_s}$, nên $m_t \notin P$, mâu thuẫn với $\mathcal{F}(\Delta) \subset P$. Do đó $\{v_{i_1},...,v_{i_s}\}$ là một phủ đỉnh của Δ.

Giả sử $\{v_{i_1},...,v_{i_s}\}$ không phải là phủ đỉnh tối tiểu của Δ, nghĩa là tồn tại một phủ đỉnh khác thực sự nằm trong $\{v_{i_1},...,v_{i_s}\}$. Không mất tính tổng quát, giả sử $\{v_{i_1},...,v_{i_{s-1}}\}$ là một phủ đỉnh của Δ, nghĩa là $F_1,...,F_q$ có ít nhất một đỉnh thuộc $\{v_{i_1},...,v_{i_{s-1}}\}$ do đó các đơn thức $m_1,...,m_q$ đều chia hết cho một trong các biến $x_{i_1},...,x_{i_{s-1}}$, do đó $\mathcal{F}(\Delta)\subset (x_{i_1},...,x_{i_{s-1}})$, mâu thuẫn với $(x_{i_1},...,x_{i_s})$ là iđêan đơn thức nhỏ nhất sinh bởi các biến chứa $\mathcal{F}(\Delta)$. Vì vậy, $\{v_{i_1},...,v_{i_s}\}\in\mathcal{P}(\Delta)$.

"$\Leftarrow$" Giả sử $\{v_{i_1},...,v_{i_s}\}\in\mathcal{P}(\Delta)$. Lập luận tương tự trên ta có $\mathcal{F}(\Delta)\subset(x_{i_1},...,x_{i_s})=P$. Giả sử có iđêan đơn thức sinh bởi các biến P' thực sự nằm trong P thỏa mãn $\mathcal{F}(\Delta)\subset P'$, không mất tính tổng quát ta giả sử $P'=(x_{i_1},...,x_{i_{s-1}})\supset\mathcal{F}(\Delta)$, lập luận tương tự trên ta có $\{v_{i_1},...,v_{i_{s-1}}\}$ là một phủ đỉnh của Δ thực sự nằm trong $\{v_{i_1},...,v_{i_s}\}$, mâu thuẫn với $\{v_{i_1},...,v_{i_s}\}\in\mathcal{P}(\Delta)$. Do đó $P=(x_{i_1},...,x_{i_s})$ là iđêan đơn thức tối tiểu sinh bởi các biến chứa $\mathcal{F}(\Delta)$.

Vậy $\mathcal{F}(\Delta)=\bigcap_{\{v_{i_1},...,v_{i_s}\}\in\mathcal{P}(\Delta)}(x_{i_1},...,x_{i_s})$. □

Ví dụ 3.3. Cho phức đơn hình Δ như trong Ví dụ 2.5
$FC(\Delta)=\{\{v_1,v_4\},\{v_1,v_2,v_3\}\}$ và
$\{v_1,v_2,v_3,v_4\}\setminus\{v_1,v_4\}=\{v_2,v_3\};\{v_1,v_2,v_3,v_4\}\setminus\{v_1,v_2,v_3\}=\{v_4\}$.
Suy ra $\mathcal{N}(\Delta)=(x_4)\cap(x_2,x_3)=\bigcap_{F\in FC(\Delta)}P_F$, trong đó $P_F=(x_i\mid v_i\notin F)$.

Theo ví dụ 2.8 a), ta có $\mathcal{P}(\Delta)=\{\{v_1\},\{v_2,v_4\},\{v_3,v_4\}\}$. Do đó

$$\mathcal{F}(\Delta)=(x_1x_2x_3,x_1x_4)=(x_1)\cap(x_2,x_4)\cap(x_3,x_4)=\bigcap_{\{v_{i_1},...,v_{i_s}\}\in\mathcal{P}(\Delta)}(x_{i_1},...,x_{i_s}).$$

Định lý 3.4. Cho $I=(m_1,...,m_q)$ là iđêan đơn thức không chứa bình phương trong vành đa thức $k[x_1,...,x_n]$ (k là một trường) và $m_1,...,m_q$ là các đơn thức có các biến lấy trong tập $\{x_1,...,x_n\}$ là hệ sinh tối tiểu của I. Các phức đơn hình $\delta_{\mathcal{F}}(I)$ và $\delta_{\mathcal{N}}(I)$ được xác định như trong Định nghĩa 2.4. Khi đó

$$I=\bigcap_{\{v_{i_1},...,v_{i_s}\}\in\mathcal{P}(\delta_{\mathcal{F}(I)})}(x_{i_1},...,x_{i_s})=\bigcap_{F\in FC(\delta_{\mathcal{N}(I)})}P_F, \text{ trong đó } P_F=(x_i\mid v_i\notin F).$$

Chứng minh.

Đặt $\Delta_1=\delta_{\mathcal{F}}(I)$, khi đó ta có $\mathcal{F}(\Delta_1)=\left(x_{i_1},...,x_{i_s}\,\middle|\,\{v_{i_1},...,v_{i_s}\}\in FC(\Delta_1)\right)$. Giả sử $FC(\Delta_1)=\{F_1,...,F_q\}$, theo Định nghĩa 2.4 a) ta có $F_i=\{v_{i_t}\,|\,x_{i_t}\mid m_i\}$ với mọi $1\le i\le q$ suy ra

$$\mathcal{F}(\Delta_1) = \quad x_{i_1},\dots,x_{i_s} \;\Big|\; v_{i_1},\dots,v_{i_s} \quad = F_i \in FC(\Delta_1) \quad = (m_1,\dots,m_q).$$

Mặt khác theo b) của Mệnh đề 3.2 ta có

$$I = \bigcap_{v_{i_1},\dots,v_{i_s} \;\in \mathcal{P}\;\Delta_1} \quad x_{i_1},\dots,x_{i_s} \quad = \bigcap_{v_{i_1},\dots,v_{i_s} \;\in \mathcal{P}\;\delta_{\mathcal{F}(I)}} \quad x_{i_1},\dots,x_{i_s} \quad .$$

Đặt $\Delta_2 = \delta_{\mathcal{N}}(I)$ khi đó ta có

$$\mathcal{N}(\Delta_2) = \quad x_{i_1},\dots,x_{i_s} \;\Big|\; v_{i_1},\dots,v_{i_s} \quad \notin \Delta_2 \quad = \quad x_{i_1},\dots,x_{i_s} \;\Big|\; v_{i_1},\dots,v_{i_s} \quad \notin \delta_{\mathcal{N}}(I) \quad .$$

Từ Định nghĩa 2.4 b) về $\delta_{\mathcal{N}}(I)$, do $v_{i_1},\dots,v_{i_s} \quad \notin \delta_{\mathcal{N}}(I)$, nên $x_{i_1},\dots,x_{i_s} \in I$ suy ra $\mathcal{N}(\Delta_2) \subset I$.

Lấy m_t là một phần tử sinh của I, giả sử $m_t = x_{t_1}\dots x_{t_u}$, khi đó ta có mặt $F_t = \quad v_{t_1},\dots,v_{t_u}$. Do $m_t \in I$ nên theo định nghĩa Định nghĩa 2.4 b) về $\delta_{\mathcal{N}}(I)$ ta có $v_{t_1},\dots,v_{t_u} \quad \notin \delta_{\mathcal{N}}(I)$ hay $m_t \in \mathcal{N}(\Delta_2)$ hay $I \subset \mathcal{N}(\Delta_2)$. Suy ra $I = \mathcal{N}(\Delta_2)$. Theo Mệnh đề 3.2 a) ta có

$$I = \mathcal{N}(\Delta_2) = \bigcap_{F \in FC\;\Delta_2} P_F = \bigcap_{F \in FC\;\delta_{\mathcal{N}(I)}} P_F,$$ trong đó $P_F = (x_i \mid v_i \notin F)$.□

Ví dụ 3.5. Cho $I = (x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4)$ như trong Ví dụ 2.6, ta có $I = (x_1) \cap (x_2, x_3, x_4)$.

Theo Ví dụ 2.6, ta có $\delta_{\mathcal{N}}(I) = \langle \{v_1\}, \{v_2, v_3, v_4\} \rangle$ và

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \setminus \{v_2, v_3, v_4\} = \{v_1\}; \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \setminus \{v_1\} = \{v_2, v_3, v_4\}.$$

Suy ra $I = \bigcap_{F \in FC\;\delta_{\mathcal{N}(I)}} P_F$, trong đó $P_F = (x_i \mid v_i \notin F)$.

Theo Ví dụ 2.8 b), ta có tập các phủ đỉnh tối tiểu của $\delta_{\mathcal{F}}(I)$ là $\mathcal{P}\;\;\delta_{\mathcal{F}}(I) = \quad v_1 \;,\; v_2, v_3, v_4$, suy ra $I = \bigcap_{x_{i_1},\dots,x_{i_s} \;\in \mathcal{P}\;\delta_{\mathcal{F}(I)}} \quad x_{i_1},\dots,x_{i_s}$.

4. KẾT LUẬN

Cho trước một iđêan đơn thức không chứa bình phương I, ta luôn xác định được phức mặt và phức không mặt tương ứng, từ đó chứng tỏ được I có phân tích theo phức mặt và phức không mặt đó.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] W. Bruns, J. Herzog (1996), *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge University Press.

[2] J. Herzog, T. Hibi (2011), *Monomial Ideals*, Springer Press.

[3] S. Faradi (2005), *Cohen-Macaulay properties of square-free monomial ideals*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 109, 299-329.

SQUARE-FREE MONOMIAL IDEALS AND SIMPLICIAL COMPLEXES

Le Xuan Dung, Tran Duy Nguyen

ABSTRACT

This paper provides a detail proof of the representation of a square-free monomial ideal with respect to the facet complex and the non-face complex.

Keywords: *Square-free monomial ideal, facet ideal, non-face ideal (Stanley-Reiner ideal), simplicial complex, facet complex, non-face complex (Stanley-Reiner complex).*

** Ngày nộp bài: 15/1/2023; Ngày gửi phản biện: 20/1/2023; Ngày duyệt đăng: 10/12/2023*