KHÔI PHỤC VÀ XẤP XỈ HÀM SỐ TUẦN HOÀN BẰNG PHƯƠNG PHÁP THÍCH NGHI TRONG KHÔNG GIAN BESOV VỚI ĐỘ TRƠN HỖN HỢP

Nguyễn Mạnh Cường[1]

TÓM TẮT

Cho lớp các hàm số nhiều biến có độ trơn hỗn hợp thuộc không gian Besov $U^a_{p,\theta}$ *với* $a \in \mathbb{Z}^d_+$, *chúng ta nhận được các đánh giá tiệm cận của entropy* $\varepsilon_n\left(U^a_{p,\theta}, L_q\right)$ *và độ dày phi thuyến* $\rho_n\left(U^a_{p,\theta}, L_q\right)$ *thông qua giả chiều. Chúng ta cũng đánh giá tiệm cận các phương pháp khôi phục thích nghi bởi các tập hợp hữu hạn được đo bằng lực lượng hoặc giả chiều của chúng.*

Từ khoá: *Không gian Besov, xấp xỉ phi tuyến, giả chiều.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Chúng ta sẽ nghiên cứu phương pháp khôi phục thích nghi cho lớp hàm số tuần hoàn thuộc không gian Besov $B^a_{p,\theta}$ với $a = \left(a_1, a_2, ..., a_d\right)$ là véc tơ thuộc R^d_+, do đó ta dùng đa thức lượng giác là công cụ để xây dựng phương pháp khôi phục và xấp xỉ cho lớp hàm số này. Trong [1] GS. Đinh Dũng đã nghiên cứu khôi phục và xấp xỉ hàm số bằng giả chiều và lực lượng của tập hợp cho lớp hàm số thuộc không gian Besov $B^r_{p,\theta}$ khi $a_1 = a_2 = ... = a_d = r$. Trong [2] tác giả đã nghiên cứu và đạt được kết quả cho trường hợp $0 < e = a_1 = a_2 = ... = a_s = a_{s+1} < a_{s+2} \le ... \le a_d, 0 \le s \le d-1$. Trong bài báo này, chúng ta cũng xét bài toán trong không gian Besov $B^a_{p,\theta}$ nhưng với $a_i \left(i = 1, ...d\right)$ là các số tự nhiên, vì vậy cách chứng minh các kết quả là tốt hơn so với [1][2] bằng cách sử dụng thêm kiến thức về nghiệm của phương trình Điôphăng.

Chúng ta xây dựng được phương pháp phi tuyến thích nghi, đồng thời đánh giá tiệm cận được tốc độ hội tụ qua các độ dày entropy $\varepsilon_n\left(U^a_{p,\theta}, L_q\right)$ và độ dày phi tuyến $\rho_n\left(U^a_{p,\theta}, L_q\right)$ và các đại lượng khôi phục thích nghi khác như $e_n\left(U^a_{p,\theta}, L_q\right), r_n\left(U^a_{p,\theta}, L_q\right)$ (xem [3][4]).

Ký hiệu $A_n\left(f\right) \ll B_n\left(f\right)$ nếu $A_n\left(f\right) \le C.B_n\left(f\right)$, ở đây C là một hằng số độc lập với n và f; $A_n(f) \asymp B_n(f)$ nếu $A_n\left(f\right) \ll B_n\left(f\right)$ và $B_n\left(f\right) \ll A_n\left(f\right)$. Khi đó ta có các ước lượng tiệm cận sau:

[1] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức; Email: nguyenmanhcuong@hdu.edu.vn*

$$\epsilon_n(U^a_{p,\theta}, L_q) \asymp \rho_n(U^a_{p,\theta}, L_q) \asymp n^{-r}(logn)^{s(r+1/2-1/\theta)}.$$
$$e_n(U^a_{p,\theta}, L_q) \asymp r_n(U^a_{p,\theta}, L_q) \asymp n^{-r}(logn)^{s(r+1/2-1/\theta)}.$$

Trường hợp thành phần của véc tơ a là các số hữu tỉ, ta cũng nhận được kết quả tương tự bằng cách quy đồng mẫu số chung các a_i khi đó ta đưa về trường hợp thành phần của véc tơ a là các số tự nhiên đã xét ở trên.

Định nghĩa 1. Hàm số tuần hoàn trên R^d có chu kỳ 2π theo từng biến được định nghĩa như hàm số trên hình xuyến d chiều $T^d:[0,2\pi]^d$ với các điểm mút đồng nhất.

Định nghĩa 2. Cho *f* là một hàm số tuần hoàn thuộc không gian $L_q(\mathrm{T}^d)$ *e* là tập con bất kỳ của $[d]:=\{1,2,...d\}$ toán tử sai phân bậc (l**,** e*) của hàm số nhiều biến xác định trên* T^d kí hiệu là $\Delta_h^{l,e}$ và được xác định bởi

$$\Delta_h^{l,e} := \prod_{i\in e} \Delta_{h_i}^l, \Delta_h^{l,\varnothing} = I,$$

ở đây toán tử $\Delta_{h_i}^l$ là toán tử sai phân tương ứng với hàm số khi xem f là hàm số một biến của biến x_i với các biến còn lại cố định. Đặt

$$\omega_l^e(f,t)_p := \sup_{|h_i|<t_i, i\in e} \left\| \Delta_h^{l,e} f \right\|_p, t\in T^d$$

là modun trơn hỗn hợp bậc (*l, e*) của *f* . Đặc biệt,

$$\omega_l^{\varnothing}(f,t)_p = \|f\|_p.$$

Cho $1 \le p \le \infty, 0<\theta\le\infty, a=(a_1,a_2,...,a_d)\in\mathbb{R}_+^d$. Chúng ta xây dựng nửa chuẩn $|f|_{B^{a,e}_{p,\theta}}$ của hàm số $f\in L_p(\mathrm{T}^d)$ như sau:

$$|f|_{B^{a,e}_{p,\theta}} := \begin{cases} \left(\int\limits_{\mathrm{T}^d} \left\{ \prod_{i\in e} t_i^{-a_i} \omega_l^e(f,t)_p \right\}^\theta \prod_{i\in e} t_i^{-1} dt \right)^{1/\theta}, & \theta<\infty, \\ \sup\limits_{t\in\mathrm{T}^d} \left\{ \prod_{i\in} t_i^{-a_i} \omega_l^e(f,t)_p \right\}, & \theta=\infty \end{cases}$$

Kí hiệu $U^a_{p,\theta}$ là hình cầu đơn vị của $B^a_{p,\theta}$.

2. BIỂU DIỄN LƯỢNG GIÁC QUA GIÁ TRỊ LẤY MẪU

Trong phần này chúng ta sẽ biểu diễn một hàm số tuần hoàn có độ trơn hỗn hợp thuộc không gian Besov $B^A_{p,\theta}$ thành chuỗi các đa thức lượng giác và chứng minh đẳng thức tương đương chuẩn. Định nghĩa sau đây có thể xem trong [2].

Định nghĩa 3. Cho $0<p\le\infty$, ta định nghĩa l_p^m là không gian dãy $x=\{x_k\}_{k=1}^m$ các số thực với chuẩn

$$\left\|\left\{x_k\right\}\right\|_{l_p^m}=\left\|x\right\|_{l_p^m}:=\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

với chuẩn max khi $p=\infty$. Chúng ta ký hiệu B_p^m là hình cầu đơn vị trong l_p^m và $\varepsilon=\left\{e_k\right\}_{k=1}^{m}$ là một cơ sở chính tắc trong l_p^m

Cho $f\in L_p\left(\mathrm{T}^d\right)$, như đã biết, $f\left(k\right)$ là hệ số Fourier thứ k của f với $1\le p\le\infty$ .Cho $k\in\mathbb{Z}_+^d$. Đặt $P_k:=\left\{s\in\mathbb{Z}^d:\left\lfloor 2^{k_j-1}\right\rfloor\le\left|s_j\right|<2^{k_j},\, j=1,...,d\right\}$, ở đây $\left\lfloor a\right\rfloor$ là phần nguyên của $a\in\mathbb{R}_+$. Cho $k\in\mathbb{Z}_+^d$ chúng ta định nghĩa toán tử δ_k như sau

$$\delta_k\left(f\right):=\sum_{s\in P_k}f\left(s\right)e^{i(s,\cdot)}$$

Từ định lý Littlewood-Paley (xem [5]) với $1<p<\infty$, ta có đẳng thức

$$\left\|f\right\|_p\asymp\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^d}\left|\delta_k\left(f\right)\right|^2\right)^{1/2}\right\|_p$$

Chúng ta nhắc lại tương đương chuẩn sau đây (xem [1]): Cho $1<p<\infty$ và $\theta\le\infty$, khi đó

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^A}\asymp\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left\{2^{S(A,k)}\left\|\delta_k\left(f\right)\right\|_p\right\}^\theta\right)^{1/\theta}, \tag{1}$$

trường hợp $\theta=\infty$ thì vế phải đẳng thức trên được thay bằng supremum.

Cho số nguyên không âm m, nhân de la Vallée Poussin V_m bậc m được xác định như sau:

$$V_m\left(t\right):=\frac{1}{3m^2}\sum_{k=m}^{2m-1}D_k\left(t\right)=\frac{\sin\left(mt/2\right)\sin\left(3mt/2\right)}{3m^2\sin^2\left(t/2\right)},$$

ở đây $D_m\left(t\right):=\sum_{|k|\le m}e^{ikt}$ là nhân Dirichlet một biến bậc m. Đặt $V_0=1$.

Cho hàm số một biến $f\in L_p\left(\mathrm{T}\right)$. Chúng ta định nghĩa hàm số $U_m\left(f\right)$ bởi

$$U_m\left(f\right):=f*U_m=3\pi m\int_{\mathrm{T}}f\left(t\right)V_m\left(\cdot-t\right)dt,$$

và hàm số $V_m\left(f\right)$ bởi

$$V_m\left(f\right):=\sum_{k\in P_m}f\left(hk\right)V_m\left(\cdot-hk\right), \tag{2}$$

ở đây $h=2\pi/3m$ và $P_m:=\left\{k\in\mathbb{Z}:0\le k<3m\right\}$. Nếu $m\in\mathbb{Z}_+^d$, toán tử V_m của hàm số nhiều biến $f\in L_p\left(\mathrm{T}\right)$ được xác định bởi

$$V_m\left(f\right):=\prod_{j=1}^{d}V_{m_j}\left(f\right)$$

ở đây toán tử một biến V_{m_j} áp dụng tương tự khi xem f là một hàm số biến x_j với các biến còn lại cố định. Chú ý rằng $V_m(f)$ là đa thức lượng giác bậc không vượt quá $2m_j-1$ với mỗi biến x_j, và

$$V_m(f,hk)=f(hk),k\in P_m^d, \tag{3}$$

ở đây $h=(2\pi/3)\left(m_1^{-1},...,m_d^{-1}\right), P_m^d:=\left\{k\in\mathbb{Z}^d:0\le k_j<3m_j, j=1,...,d\right\}$. Chúng ta có đẳng thức sau đây (xem [5])

$$\left\|V_m(f)\right\|_p \asymp \prod_{j=1}^{d} m_j^{-1/p}\left\|\left\{f(hk)\right\}\right\|_{l_p^\nu}, 1\le p\le\infty, \tag{4}$$

ở đây $\nu=\left|P_m^d\right|=3^d\prod_{j=1}^{d}m_j$. Ký hiệu T_m không gian các đa thức lượng giác bậc không vượt quá m_j với mỗi biến $x_j, j=1,...,d$. Dễ dàng kiểm tra được

$$V_m(f)=f,\forall f\in T_m \tag{5}$$

Tiếp theo, cho hàm số một biến $f\in L_p(T)$, chúng ta định nghĩa

$$v_0(f):=V_1(f),$$

$$v_k(f):=V_{2^k}(f)-V_{2^{k-1}}(f), k=1,2,...$$

Cho $k\in\mathbb{Z}_+^d$, định nghĩa toán tử v_k cho hàm nhiều biến trong $L_p\left(T^d\right)$ tương tự như toán tử V_m. Toán tử $u_k, k\in\mathbb{Z}_+^d$, là tương tự khi thay $V_m(f)$ bởi $U_m(f)$.

Chú ý $v_k(f)$ và $u_k(f)$ là các đa thức lượng giác bậc không vượt quá $2^{k_j+1}-1$ với biến $x_j, j=1,...d$

Đặc biệt, bất đẳng thức sau đây đã được chứng minh cho $f\in L_p(T)$ (xem Bổ đề 6.2 trong [6])

$$\left\|V_m\left(V_n(f)\right)\right\|_p\le C\|f\|_p(n/m)^{1/p}, n\ge m. \tag{6}$$

Chúng ta sử dụng các ký hiệu: $2^k:=\left(2^{k_1},...,2^{k_d}\right)$ với $k\in\mathbb{Z}^d, 1=(1,...,1)\in\mathbb{R}^d$. Cho $k,k'\in\mathbb{Z}^d$, bất đẳng thức $k\ge k'$ có nghĩa là $k_j\ge k'_j, j=1,...,d$.

Định lý 1. Cho $1\le p\le\infty, 0<\theta\le\infty$ và $r>0$. Khi $\theta<\infty$, Chúng ta có

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^a}\asymp\left(\sum\left\{2^{(a,k)}\left\|u_k(f)\right\|_p\right\}^\theta\right)^{1/\theta}$$

và nếu $r>1/p$ *thì*

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^a}\asymp\left(\sum\left\{2^{(a,k)}\left\|v_k(f)\right\|_p\right\}^\theta\right)^{1/\theta}$$

với chú ý rằng vế phải được thay bằng supremum khi $\theta = \infty$.

Chúng ta cũng dùng ký hiệu $B_{p,\theta} = B^a_{p,\theta}$ cho $a = (0,...,0)$. Đặt $1 < q < \infty$. Chúng ta có bất đẳng thức sau đây (có thể xem trong [2])

$$\| f \|_{B_{q,\max\{q,2\}}} \le \| f \|_q \le \| f \|_{B_{q,\min\{q,2\}}} . \tag{7}$$

Đặt $\Phi = \{\varphi_k\}_{k\in Q}$ là một họ các phần tử trong L_q. Ký hiệu $M_n(\Phi)$ à đa tạp phi tuyến tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính có dạng $\varphi = \sum_{k\in K} a_k\varphi_k$, trong đó K là một tập hợp con của Q có số phần tử là n. Ta gọi L_q-xấp xỉ từ n phần tử của hàm số $f \in Lq$ liên quan đến họ Φ là L_q-xấp xỉ của f bởi các phần tử từ $M_n(\Phi)$. Chúng ta sử dụng một xấp xỉ phi tuyến L_q-xấp xỉ đối với họ

$$\mathrm{V} := \{\varphi_{k,s}\}_{s\in Q_k, k\in\mathbb{Z}^d_+} .$$

Trong đó họ V được xây dựng từ tịnh tiến bản nguyên của các cặp đôi tích hỗn hợp tensor nhân nhiều biến De la Vallée Poussin.

Bổ đề 1. Cho ζ là một số tự nhiên, ký hiệu $\Delta_\zeta := \{k \in \mathbb{Z}^d_+ : (a,k) = \zeta\}, \zeta > 0$. Khi đó tồn tại các hằng số dương C*1* và C*2* sao cho

$$C_2 2^{\zeta/r}\zeta^s \le \sum 2^{|k|_1} \le C_1 2^{\zeta/r}\zeta^s. \tag{8}$$

Bổ đề 2. Cho $0 < p \le 1$, và một số nguyên dương m. Với bất kỳ số nguyên dương $n \ge m$ chúng ta có thể xây dựng được tập hợp con M của l^m_∞ có lực lượng không quá 2^n và một ánh xạ $S : l^m_\infty \to M$ thỏa mãn

$$\sup_{x\in B^m_p} \|x - S(x)\|_{l^m_\infty} \le C(p) m^{-1/p_2 - n/m}.$$

Bổ đề 3. Cho $0 < p, \theta, \tau \le \infty$. Với bất kỳ số nguyên dương $n < m = \sum_{k\in Q} N_k$, chúng ta có thể xây dựng một tập hợp con $M \subset b^N_{\infty,\tau}$ có lực lượng không quá $2^n \binom{m}{n}$ và một ánh xạ $S : b^N_{p,\theta} \to M$ thỏa mãn

$$\sup_{x\in S^N_{p,\theta}} \|x - S(x)\|_{b^N_{\infty,\tau}} \le C(p) n^{-1/p} |Q|^{1/\tau + (1/p - 1/\theta)_+} .$$

Bổ đề 1 chứng minh trong [1], Bổ đề 2 và 3 đã được chứng minh trong [2].

Các kết quả chính về phương pháp xấp xỉ và khôi phục hàm số bằng phương pháp phi tuyến trong không gian Besov $B^a_{p,\theta}$ được phát biểu trong các định lý sau đây.

Định lý 2. Cho $1 < p, q < \infty, 0 < \theta \le \infty$ *và* $r > 1/p$. *Chúng ta có*

$$\varepsilon_n(U^a_{p,\theta}, L_q) \le e_n(U^a_{p,\theta}, L_q) \ll (n/\log^s n)^{-r} (\log n)^{s(1/2 - 1/\theta)}. \tag{9}$$

Ngoài ra, xây dựng được một tập con hữu hạn V^* *của* V, *một tập hợp con B trong* $M_n\left(V^*\right)$ có $|B| \le 2^n$ và một ánh xạ $S_n^B : U_{p,\theta}^a \to B$ thỏa mãn

$$E\left(U_{p,\theta}^a, B, L_p\right) \le \sup_{f \in U_{p,\theta}^a} \left\| f - S_n^B\left(f\right)\right\|_q \ll (n/\log^s n)^{-r}\left(\log n\right)^{s(1/2-1/\theta)}.$$

Định lý 2 được suy ra từ định lý:

Định lý 3. Cho $0 < p, q, \theta \le \infty, 0 < \tau \le \theta$ *và* $r > 1/p$. *Ta có*

$$\varepsilon_n\left(U_{p,\theta}^a, B_{q,\tau}\right) \le e_n\left(U_{p,\theta}^a, B_{p,\tau}\right) \ll E_{\theta,\tau}\left(n\right), \tag{10}$$

ở đây $E_{\theta,\tau}\left(n\right) = \left(n/\log^s n\right)^{-r}\left(\log n\right)^{s(1/\tau-1/\theta)}$.

Ngoài ra, xây dựng được một tập con hữu hạn V^* *của* V, *một tập hợp con B trong* $M_n\left(V^*\right)$ có $|B| \le 2^n$ và một ánh xạ $S_n^B : U_{p,\theta}^a \to B$ thỏa mãn

$$E\left(U_{p,\theta}^a, B, B_{p,\tau}\right) \le \sup_{f \in U_{p,\theta}^a} \left\| f - S_n^B\left(f\right)\right\|_{B_{q,\tau}} \ll E_{\theta,\tau}\left(n\right). \tag{11}$$

Chứng minh. Ta thấy rằng (10) suy ra từ (11), do đó ta chỉ cần chứng minh (11).

Giả sử $k = \left(k_1, k_2, ..., k_{s+1}, k_{s+2}, ..., k_d\right) \in \mathbb{Z}_+^d$. Theo Định lý 1 thì bất kỳ $f \in B_{p,\theta}^a$ biểu diễn được thành chuỗi

$$f = \sum_{v=0}^{\infty} f_{v,} \tag{12}$$

hội tụ theo chuẩn trong $B_{p,\tau,}$ với mọi $v \in \mathbb{N}$ và

$$f_v = \sum_{k \in D_v} \sum_{s \in Q_k} f_{k,s}\varphi_{k,s,} \tag{13}$$

với $D_v := \left\{k \in \mathbb{Z}_+^d : \left(a, k\right) = v\right\}$. Ngoài ra, ta có các tương đương chuẩn sau đây

$$\| f_v \|_{B_{p,\theta}^a} \asymp 2^v \left\| \left\{ \left\{ 2^{-|k|_{1/p}} f_{k,s} \right\} \right\} \right\|_{b_{p,\theta}^{N^v}},$$

$$\| f_v \|_{B_{p,\tau}} \asymp \left\| \left\{ \left\{ 2^{-|k|_{1/p}} f_{k,s} \right\} \right\} \right\|_{b_{p,\tau}^{N^v}}, N^v := \left\{\infty N_k\right\}_{k \in D_v} = \left\{|Q_k|\right\}_{k \in D_v}. \tag{14}$$

Ta có $D_v \cap D_{v'} = \varnothing$ nếu $v \ne v'$ và $\mathbb{Z}_+^d = U_{v \in \mathbb{N}} D_v$. Theo tính chất của phương trình nghiệm nguyên Điôphăng ta có

$$\left|D_v\right| = v^{d-1}.$$

Từ Bổ đề 1 ta nhận được

$$m_v = 3^d \sum_{k \in D_v} 2^{|k|_1} \asymp v^s 2^{v/r}, \tag{15}$$

với $m_v := \sum_{k\in D_v} |Q_k|$. Cho một số nguyên dương n, chúng ta lấy một số nguyên dương $\zeta = \zeta(n)$ thỏa mãn điều kiện

$$C2^{\zeta/r}\zeta^s \le n \asymp 2^{\zeta/r}\zeta^s, \tag{16}$$

ở đây C là một hằng số được chọn sau cho phù hợp.

Chú ý rằng chúng ta có bất đẳng thức $\|f\|_{B_{p,\tau}} \le \|f\|_{B_{\infty,\tau}}$ và bao hàm $U^a_{p,\theta} \subset U^a_{p,\max\{p,\theta\}}$. Do đó chỉ cần chứng minh định lý cho trường hợp $p \le \theta$ và $q = \infty$. Chọn cố định số δ thỏa mãn $0 < \delta < \min\{1, p(r - 1/p)\}$.

Xét dãy số $\{n_v\}_{v=0}^{\infty}$ được xác định bởi

$$n_v := \begin{cases} \left\lfloor m_v 2^{(1-\delta)(\zeta - v)/r} \right\rfloor + 1 & 0 \le v < \zeta, \\ \left\lfloor m_v 2^{(1+\delta)(\zeta - v)/r} \right\rfloor & v \ge \zeta \end{cases} \tag{17}$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng $n_v > 0$ cho $v \le \zeta(1+\delta)/\delta - v_0$, ở đây $v_0 = v_0(\delta, d)$ là một hằng số dương. Do $(1+\delta)/\delta > r/(r - 1/p)$, ta có thể cố định một số γ sao cho $r/(r-1/p) < \gamma < (1+\delta)/\delta$. Đặt $\zeta^* = \lfloor \gamma\zeta \rfloor$ và cho ζ đủ lớn ta có $n_v > 0 \forall v \le \zeta^*$.

Trường hợp $0 \le v \le \zeta$. Khi đó $n_v \ge m_v$. Lấy một số ρ sao cho $0 < \rho \le \min\{1, p, \theta\}$. Ta có $(a,k) = v$ suy ra $r(k_1 + k_2 + ... k_{s+1} + k_{s+2} + ... + k_d) \le v$, do đó $|k|_1 \le \frac{v}{r}$ và $N_k = 2^{|k|_1} \le 2^{v/r} := N_{0,} \forall k \in D_v$. Từ bất đẳng thức

$$\|\cdot\|_{b^{N^v}_{\rho,\rho}} \le |D_v|^{1/\rho - 1/\theta} N_0^{1/\rho - 1/p} \|\cdot\|_{b^{N^v}_{p,\theta}}$$

và $\|\cdot\|_{b^{N^v}_{\infty,\tau}} \le |D_v|^{1/\tau} \|\cdot\|_{b^{N^v}_{\infty,\infty}}$,

với bất kỳ tập hợp con $M_v \subset b^{N^v}_{\infty,\tau}$ và ánh xạ $G_v : b^{N^v}_{p,\theta} \to M_v$ ta có

$$\sup_{x\in S^{N^v}_{p,\theta}} \|x - G_v(x)\|_{b^{N^v}_{\infty,\tau}} \le |D_v|^{1/\rho - 1/\tau} N_0^{1/\rho - 1/p} \sup_{x\in S^{N^v}_{\rho,\rho}} \|x - G_v(x)\|_{b^{N^v}_{\infty,\infty}}.$$

Xem $S^{N^v}_{\rho,\rho}$ và $b^{N^v}_{\infty,\infty}$ như $B^{m_v}_{\rho}$ và $l^{m_v}_{\infty}$ và áp dụng Bổ đề 2 như sau: Cho số nguyên dương n ta xây dựng được một tập hợp con M của $l^{m_v}_{\infty}$ cho $n \ge m$ có lực lượng không quá 2^n và một ánh xạ $S : l^m_\rho \to M$ thỏa mãn

$$\sup_{x\in B^m_p} \|x - S(x)\|_{l^m_\infty} \le C(p) m^{-1/\rho} 2^{-n/m}.$$

Do đó, tồn tại một tập hợp $M_\nu \subset \mathbf{b}_{\infty,\tau}^{N^\nu}$ có lực lượng không vượt quá 2^{n_ν} và một ánh xạ $G_\nu : \mathbf{b}_{p,\theta}^{N^\nu} \to M_\nu$ thỏa mãn

$$\sup_{x \in S_{p,\theta}^{N^\nu}} \left\| x - G_\nu(x) \right\|_{\mathbf{b}_{\infty,\tau}^{N^\nu}} \le \left| D_\nu \right|^{1/\rho - 1/\theta} N_0^{1/\rho - 1/p} m_\nu^{-1/\rho_2 - n_\nu/m_\nu}.$$

Xác định một tập hợp con B_ν của $B_{\infty,\tau}$ và ánh xạ $S_\nu : B_{p,\theta}^a \to B_\nu$ như sau. Từ

$$\| f \|_{B_{p,\theta}^a} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\{ 2^{(a,k) - |k|_1/p} \left\| \{ f_{k,s} \} \right\|_{l_p^{|Q_k|}} \right\}^\theta \right)^{1/\theta},$$

$$\| f \|_{B_{p,\theta}^a} = \left(\sum_{k \in D_\nu} \left\{ 2^{(a,k) - |k|_1/p} \left\| \{ f_{k,s} \} \right\|_{l_p^{|Q_k|}} \right\}^\theta \right)^{1/\theta},$$

suy ra $\| f_\nu \|_{B_{p,\theta}^a} \le \| f \|_{B_{p,\theta}^a}$. Do đó, nếu $f \in B_{p,\theta}^a$ thì $f_\nu \in B_{p,\theta}^a$, và do đó $\left\{ \{ f_{k,s} \}_{s \in Q_k} \right\}_{k \in D_\nu}$ nằm trong $\mathbf{b}_{p,\theta}^{N^\nu}$. Đặt

$$S_\nu(f) = \sum_{k \in D_\nu} \sum_{s \in Q_k} f_{k,s}^* \varphi_{k,s}$$

và $B_\nu = S_\nu(M_\nu)$, ở đây $\left\{ \{ f_{k,s}^* \}_{s \in Q_k} \right\}_{k \in D_\nu} = G_\nu \left(\left\{ \{ f_{k,s} \}_{s \in Q_k} \right\}_{k \in D_\nu} \right)$. Dễ thấy rằng $\left| B_\nu \right| \le \left| M_\nu \right| \le 2^{n_\nu}$ và

$$\begin{aligned} \left\| f_\nu - S_\nu(f) \right\|_{B_{\infty,\tau}} &\asymp \left\| \left\{ \{ f_{k,s} - f_{k,s}^* \} \right\} \right\|_{\mathbf{b}_{\infty,\tau}^{N^\nu}} \\ &\ll \left| D_\nu \right|^{1/\rho - 1/\theta + 1/\tau} N_0^{1/\rho - 1/p} m_\nu^{-1/\rho_2 - n_\nu/m_\nu} 2^{-\nu} N_0^{1/p} \| f_\nu \|_{B_{p,\theta}^a} \\ &\ll \zeta^{s(1/\tau - 1/\theta)} 2^{-\zeta} 2^{\zeta - \nu} 2^{-2^{(1-\delta)(\zeta - \nu)}} \| f_\nu \|_{B_{p,\theta}^a}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\left\| f_\nu - S_\nu(f) \right\|_{B_{\infty,\tau}} \ll A(\nu) \| f_\nu \|_{B_{p,\theta}^a}, \tag{18}$$

với $A(\nu) = \zeta^{a(1/\tau - 1/\theta)} 2^{-\zeta} 2^{r(\zeta - \nu)} 2^{-2^{(1-\delta)(\zeta - \nu)/r}}$.

Trường hợp $\zeta < \nu \le \zeta^*$. Khi đó $n_\nu < m_\nu$. Theo Bổ đề 3 thì với bất kỳ số nguyên dương $n < m = \sum_{k \in Q} N_k$ ta xây dựng được một tập hợp con $M \subset \mathbf{b}_{\infty,\tau}^N$ có lực lượng không quá $2^n \binom{m}{n}$ và ánh xạ $S : \mathbf{b}_{p,\theta}^N \to M$ thỏa mãn

$$\sup_{x \in S_{p,\theta}^N} \left\| x - S(x) \right\|_{\mathbf{b}_{\infty,\tau}^N} \le C(p) n^{-1/p} |Q|^{1/\tau + (1/p - 1/\theta)_+}.$$

Do đó, ta có thể xây dựng một tập hợp con B_v của $B_{\infty,\tau}$ có lực lượng không vượt quá $2^{n_v}\binom{m_v}{n_v}$, cũng như một ánh xạ $S_v : B^a_{p,\theta} \to B_v$ sao cho

$$\left\| f_v - S_v(f) \right\|_{B_{\infty,\tau}} \asymp \left\| \left\{ \left\{ f_{k,s} - f^*_{k,s} \right\} \right\} \right\|_{\mathbf{b}^{N^v}_{\infty,\tau}}$$
$$\ll n_v^{-1/p} \left| D_v \right|^{1/\tau + (1/p - 1/\theta)} + \left\| \left\{ \left\{ f_{k,s} \right\} \right\} \right\|_{\mathbf{b}^{N^v}_{p,\theta}}. \qquad (19)$$

Vì $|k|_1 \le v/r$ nên

$$\left\| f_v \right\|_{B^a_{p,\theta}} \asymp 2^v \left\| \left\{ \left\{ 2^{-|k|_1/p} f_{k,s} \right\} \right\} \right\|_{\mathbf{b}^{N^v}_{p,\theta}} \ge 2^v 2^{-v/pr} \left\| \left\{ \left\{ f_{k,s} \right\} \right\} \right\|_{\mathbf{b}^{N^v}_{p,\theta}},$$

do đó $\left\| \left\{ \left\{ f_{k,s} \right\} \right\} \right\|_{\mathbf{b}^{N^v}_{k,\theta}} \ll 2^{-v} v^{v/pr} \left\| f_v \right\|_{B^a_{k,\theta}}$ và với $\zeta < v \le \zeta^* = \lfloor \gamma\zeta \rfloor$. Tiếp tục đánh giá (19),

$$\left\| f_v - S_v(f) \right\|_{B_{\infty,\tau}} \asymp \left\| \left\{ \left\{ f_{k,s} - f^*_{k,s} \right\} \right\} \right\|_{\mathbf{b}^{N^v}_{\infty,\tau}}$$
$$\ll n_v^{-1/p} \left| D_v \right|^{1/\tau + (1/p - 1/\theta)_+} \left\| \left\{ \left\{ f_{k,s} \right\} \right\} \right\|_{\mathbf{b}^{N^v}_{p,\theta}}$$
$$\ll \left\{ v^s 2^{v/r} 2^{(1+\delta)(\zeta - v)/r} \right\}^{-1/p} v^{(d-1)(1/\tau + 1/p - 1/\theta)} 2^{-v} 2^{v/pr} \left\| f_v \right\|_{B^a_{p,\theta}}$$
$$\ll C(v) \left\| f_v \right\|_{B^a_{p,\theta}},$$

ở đây $C(v) = 2^{-\zeta} \zeta^{s(1/\tau - 1/\theta)} \left(v - \zeta^* \right)^{s(1/\tau - 1/\theta)} 2^{-\beta(v - \zeta)}, \beta = 1 - (1+\delta)/pr > 0$.

Trường hợp $v > \zeta^*$. Đặt $\mu = 1/\gamma$, từ (14) và bất đẳng thức Holder ta có

$$\left\| f_v \right\|_{B_{\infty,\tau}} \ll 2^{-v} 2^{v/pr} \left\| f_v \right\|_{B^a_{p,\tau}}$$
$$\ll 2^{-v} 2^{v/pr} \left| D_v \right|^{1/\tau - 1/\theta} \left\| f_v \right\|_{B^a_{p,\theta}}$$
$$\ll 2^{-\mu\zeta^*} \left(\zeta^* \right)^{s(1/\tau - 1/\theta)} \left(v - \zeta^* \right)^{s(1/\tau - 1/\theta)} 2^{-\mu(v - \zeta^*)} \left\| f_v \right\|_{B^a_{p,\theta}}$$
$$\ll 2^{-\zeta} \zeta^{s(1/\tau - 1/\theta)} \left(v - \zeta^* \right)^{s(1/\tau - 1/\theta)} 2^{-\mu(v - \zeta^*)} \left\| f_v \right\|_{B^a_{p,\theta}}$$
$$\ll E(v) \left\| f_v \right\|_{B^a_{p,\theta}}, \qquad (20)$$

với $E(v) = 2^{-\zeta} \zeta^{s(1/\tau - 1/\theta)} \left(v - \zeta^* \right)^{s(1/\tau - 1/\theta)} 2^{-\mu(v - \zeta^*)}$.

Cho một hàm số $f \in U^a_{p,\theta}$, chúng ta xác định ánh xạ S bởi

$$S(f) := \sum_{v \in \mathbb{Z}_+} S_v(f)$$

Ta nhận được

$$f - S(f) = \sum_{v=0}^{\zeta^*} \left(f - S_v(f) \right) + \sum_{v > \zeta^*} f_v$$

Do đó, từ (18), (19), (20) và bất đẳng thức $\|f_\nu\|_{B^{B^a}_{p,\theta}} \ll \|f\|_{B^a_{p,\theta}}$ suy ra ước lượng sau đây cho bất kỳ $f \in U^a_{p,\theta}$

$$
\begin{aligned}
\|f - S(f)\|_{B_{\infty,\tau}} &\le \sum_{\nu=0}^{\zeta^*} \|f - S_\nu(f)\|_{B_{\infty,\tau}} + \sum_{\nu>\zeta^*} \|f_\nu\|_{B_{\infty,\tau}} \\
&\ll \sum_{0\le\nu\le\zeta} A(\nu) + \sum_{\zeta<\nu\le\zeta^*} C(\nu) + \sum_{\nu>\zeta^*} E(\nu) \\
&\ll 2^{-\zeta} \zeta^{s(1/\tau-1/\theta)} \sum_{0\le\nu\le\zeta} 2^{(\zeta-\nu)} 2^{-2^{(1-\delta)(\zeta-\nu)}} \\
&+ 2^{-\zeta} \zeta^{s(1/\tau-1/\theta)} \sum_{\zeta<\nu\le\zeta^*} 2^{-\beta(\nu-\zeta)} \\
&+ 2^{-\zeta} \zeta^{s(1/\tau-1/\theta)} \sum_{\nu>\zeta^*} \left(\nu-\zeta^*\right)^{s(1/\tau-1/\theta)} 2^{-\mu(\nu-\zeta^*)} \\
&\ll 2^{-\zeta} \zeta^{s(1/\tau-1/\theta)} \asymp E_{\theta,\tau}(n).
\end{aligned}
$$

Điều này có nghĩa rằng

$$\sup_{f\in U^a_{p,\theta}} \|f - S(f)\| \ll E_{\theta,\tau}(n) \tag{21}$$

Chú ý rằng S là ánh xạ từ $U^a_{p,\theta}$ đến $B := \sum_{\nu=0}^{\xi^*} B_\nu$. Hơn nữa, từ (15), (17) chúng ta có

$$
\begin{aligned}
log\,|B| &\le \sum_{\nu=0}^{\xi^*} log\,|B_\nu| \ll \sum_{0\le\nu\le\xi} 2^{\xi/r} \xi^s 2^{-\delta(\xi-\nu)/r} \\
&+ \sum_{\xi<\nu\le\xi^*} \left(2^{-\delta(\nu-\xi)/r} 2^{\xi/r} \xi^s + log \binom{m_\nu}{n_\nu} \right).
\end{aligned}
$$

Áp dụng công thức Stirling, ta có

$$
\begin{aligned}
log \binom{m_\nu}{n_\nu} &\le n_\nu \log \frac{bm_\nu}{n_\nu} \\
&\le 2^{-\delta(\nu-\xi)/r} 2^{\xi/r} \xi^s (b + (1+\delta)(\nu-\xi)),
\end{aligned}
$$

với b là một hằng số. Do đó,

$$log\,|B| \le C' 2^{\xi/r} \xi^s \sum_{t=0}^{\infty} 2^{-\delta t} t^s,$$

ở đây C′ là một hằng số không phụ thuộc. Lập $C'' := C' \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-\delta t} t^s$, ta nhận được $log\,|B| \le n$, và do đó $|B| \le 2^n$.

Đặt $\mathbf{V}^* = \cup_\nu \mathbf{V}^*_\bullet$, ở đây $\mathbf{V}^*_\bullet = \{\varphi_{k,s}\}_{s\in Q_k}, k \in D_\nu$. Theo cách xây dựng ta thấy rằng $\mathbf{V}^*$ là một tập con hữu hạn của V và *B* là một tập hợp con của $\mathbf{M_n}\left(\mathbf{V}^*\right)$.

Tóm lại, chúng ta xây dựng được tập hợp con B trong $\mathbf{M_n}\left(\mathbf{V}^*\right)$ có lực lượng không vượt quá 2^n và một phương pháp khôi phục giá trị lấy mẫu $S_n^B := S$ thỏa mãn bất đẳng thức (21), do đó có cận trên của (10) và (11).

Chứng minh của Định lý 2. Chú ý rằng

$$\|.\| q_1 \ll \|.\| q_2, q_1 \le q_2. \tag{22}$$

Từ (22), ta chỉ cần chứng minh (9) cho $q > 2$ là đủ, chúng ta dễ dàng kiểm tra được rằng

$$e_n(U^a_{p,\theta}, L_q) \ll e_n(U^a_{p,\theta}, B_{q,min\{q,2\}}).$$

Sử dụng bất đẳng thức này và Định lý 3, ta nhận được cận trên của $e_n(U^a_{p,\theta}, L_q)$.

Cận dưới của $\rho(U^a_{p,\theta}, L_q)$ nhận được từ định lý sau đây.

Định lý 4. Cho $1 < \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} < \infty$, $0 < \theta \le \infty$ và $\boldsymbol{r} > 1/\boldsymbol{p}$. Chúng ta có

$$\rho(U^a_{p,\theta}, L_q) \gg (n/\ log^s n)^{-r} (logn)^{s(1/2-1/\theta)}.$$

Chứng minh. Ký hiệu $U^{a^*}_{p,\theta}(T^{s+1})$ là hình cầu đơn vị trong không gian $B^{a^*}_{p,\theta}(T^{s+1}) \subset L_q(T^{s+1})$, ở đây $a^* := (a_1, a_2, \ . \ . \ . \ , a_{s+1}) = (r, r, \ . \ . \ . \ , r) \in R^{s+1}_+$. Trong [3] đã chứng minh được

$$\rho_n(U^{a^*}_{p,\theta}(T^{s+1}), B_{q,\tau}(T^{s+1})) \gg n^{-r} (logn)^{s(r+1/2-1/\theta)}.$$

Chú ý rằng cho bất kỳ hàm số $f \in L_q(T^{s+1})$, thì hàm số $g : T^d \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $g(x_1, x_2, ..., x_d) = f(x_1, ..., x_{s+1})$ nằm trong $L_q(T^d)$. Ngoài ra, nếu $f \in U^{a^*}_{p,\theta}(T^{s+1})$ thì $g \in U^a_{p,\theta}(T^d)$. Do đó, ta suy ra

$$\rho_n(U^a_{p,\theta}(T^d), B_{q,\tau}(T^d)) \ge \rho_n(U^{a^*}_{p,\theta}(T^{s+1}), B_{q,\tau}(T^{s+1})).$$

Vì vậy

$$\rho_n(U^a_{p,\theta}(T^d), B_{q,\tau}(T^d)) \gg (n/log^s n)^{-r} (logn)^{s(1/2-1/\theta)}.$$

Chứng minh được hoàn thành.

Từ các Định lý 2, 3, 4, ta có định lý sau đây

Định lý 5. Cho $1 < \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} < \infty$, $0 < \theta \le \infty$ và $\boldsymbol{r} > 1/\boldsymbol{p}$. Ta có

$$\epsilon_n(U^a_{p,\theta}, L_q) \asymp \rho_n(U^a_{p,\theta}, L_q) \asymp n^{-r} (logn)^{s(r+1/2-1/\theta)}.$$

Hơn nữa, chúng ta cũng đánh giá tiệm cận của phương pháp khôi phục thích nghi với giá trị lấy mẫu tối ưu

$$e_n(U^a_{p,\theta}, L_q) \asymp r_n(U^a_{p,\theta}, L_q) \asymp n^{-r} (logn)^{s(r+1/2-1/\theta)}.$$

3. KẾT LUẬN

Bài báo nghiên cứu phương pháp khôi phục thích nghi cho lớp hàm số tuần hoàn thuộc không gian Besov $B^a_{p,\theta}$ với $a \in \mathbb{Z}^d_+$, đánh giá tốc độ hội tụ của phương pháp qua các đại lượng đặc trưng. Hơn nữa, vì trong bài báo này nghiên cứu véc tơ a có các thành phần là số tự nhiên nên trong chứng minh Định lý 3 có nhiều điểm khác biệt, cụ thể là sử dụng tính chất của phương trình nghiệm nguyên, từ đó ta có cách chứng minh khác nhanh gọn hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Dung D. (2000), *Continous algorithms in* n*-term approximation and nonlinear widths*, J. Approx. Theory, 102, 217-242.

[2] Dung D. (2001), *Non-linear approximations using sets of finite cardinality or finite pseudo-dimension*, J. Complexity., 17, 467-492.

[3] Dung D. (2009), *Non-linear sampling recovery based on quasi-interpolant wavelet representations*, Adv. in Comput. Math., 30, 375-401.

[4] Dung D. (2011), *Optimal adaptive sampling recovery*, Adv. in Comput. Math., 34, 1-41.

[5] S.Nikol'skii (1975), *Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems*, SpringerVerlag, Berlin Heidelberg New York.

[6] Temlyakov V. (1993), *Approximation of periodic functions,* Nova Science Publishers, Inc., New York.

[7] Ratsaby, J., Maiorov, V. (1999), *On the degree of approximation by manifolds of finite pseudo-dimension*, Constr. Approx. 15, 291-300.

[8] Cuong N.M. (2019), *Nonlinear approximations of functions having mixed smoothness,* Journal of Computer Science and Cybernetics, 35, 119-134.

RECOVERY AND ARAPPROXIMATIONS OF CYCLIC FUNCTION HAVING NONUNIFORM MIXED SMOOTHNESS BY METHODS OF ADAPTIVE IN BESOV SPACES

Nguyen Manh Cuong

ABSTRACT

For multivariate Besov-type classes $U^a_{p,\theta}$ *of functions having nonuniform mixed smoothness* $a \in \mathbb{Z}^d_+$*, we obtain the asumptotic order of entropy numbers* $\varepsilon_n\left(U^a_{p,\theta}, L_q\right)$ *and non-linear widths* $\rho_n\left(U^a_{p,\theta}, L_q\right)$ *defined via pseudo-dimension. We obtain also the asymptotic order of optimal methods of adaptive sampling recovery by sets of a finite capacity which is measured by their cardinality or pseudo-dimension.*

Keywords: *Besov-type spaces, nonlinear approximation, pseudo-dimension.*

** Ngày nộp bài: 13/6/2023; Ngày gửi phản biện: 27/6/2023; Ngày duyệt đăng: 10/12/2023*