NỬA NHÓM LIÊN TỤC ĐỀU TRONGKHÔNG GIAN BANACH XÁC SUẤT

Lê Thị Oanh[1]

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi xin giới thiệu khái niệm nửa nhóm liên tục đều trong không gian Banach xác suất và chứng minh tính chất đặc trưng của toán tử sinh của nửa nhóm liên tục đều.

Từ khóa: *Không gian Banach xác suất, toán tử ngẫu nhiên, nửa nhóm liên tục đều, toán tử sinh.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Lý thuyết toán tử ngẫu nhiên không chỉ là mở rộng ngẫu nhiên của lý thuyết toán tử tất định mà nó còn có nhiều áp dụng quan trọng trong các lĩnh vực khác nhau như phương trình tiến hóa ngẫu nhiên, điểm bất động… lý thuyết toán tử ngẫu nhiên được nghiên cứu theo nhiều hướng khác nhau [1-5]. Gần đây trong tài liệu số [1-4,6] các tác giả đã đưa ra khái niệm nửa nhóm ngẫu nhiên liên tục mạnh trong không gian Banach xác suất và chứng minh một số tính chất của nó. Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu khái niệm nửa nhóm liên tục đều trong không gian Banach xác suất và chứng minh các tính chất đặc trưng của nó.

2. NỘI DUNG

2.1. Toán tử ngẫu nhiên trên không gian Banach xác suất

Giả sử $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ là không gian xác suất đầy đủ, ký hiệu $L_0(\Omega)$ là không gian các biến ngẫu nhiên thực. Trong bài báo này, sự hội tụ trong $L_0(\Omega)$ là hội tụ theo xác suất. Nếu dãy $(u_n) \in L_0(\Omega)$ hội tụ tới u trong $L_0(\Omega)$ thì ta viết $\lim_n u_n = u$. Với $\xi_1, \xi_2 \in L_0(\Omega)$ thỏa mãn $\xi_1(\omega) \geq \xi_2(\omega)$ hầu chắc chắn khi đó ta viết $\xi_1 \geq \xi_2$. Ký hiệu $L_0^+(\Omega) = \{\xi \in L_o(\Omega) : \xi \geq 0\}$.

Định nghĩa 1. [6]. Một cặp $(X, \|.\|)$ được gọi là một không gian định chuẩn xác suất nếu X là modul trái trên đại số $L_0(\Omega)$ và $\|.\|$ là ánh xạ từ X đến $L_0^+(\Omega)$ sao cho các tính chất sau là thỏa mãn

1. $\|u\| = 0$ khi và chỉ khi $u = \theta$ với θ là phần tử không của X.
2. $\|u + v\| \leq \|u\|+\|v\|$ với $u, v \in X$.
3. $\|\xi u\| = |\xi|\|u\|$ với $\xi \in L_0(\Omega)$ và $u \in X$.

Ánh xạ $\|.\|: X \to L_0^+(\Omega)$ gọi là chuẩn ngẫu nhiên trên X.

[1] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

Định nghĩa 2. Giả sử X là một không gian định chuẩn xác suất.

1. Một dãy $(u_n) \subset X$ là hội tụ tới $u \in X$ nếu $\|u_n - u\|$ hội tụ đến 0 trong $L_0(\Omega)$.

2. Một dãy $(u_n) \subset X$ là dãy Cauchy nếu $\lim_{m,n\to\infty} P(\|u_n - u_m\| > \varepsilon) = 0$ với mỗi $\varepsilon > 0$.

3. X được gọi là không gian Banach xác suất nếu mọi dãy Cauchy $(u_n) \subset X$ là hội tụ.

Định nghĩa 3. [4]. Giả sử X là một không gian định chuẩn xác suất.

1. Ánh xạ $\Phi : D(\Phi) \to X$ được gọi là toán tử ngẫu nhiên nếu miền xác định $D(\Phi)$ là một không gian định chuẩn xác suất và với $u_1, u_2 \in D(\Phi)$ và $\xi_1, \xi_2 \in L_0(\Omega)$, ta có:

$\Phi(\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2) = \xi_1 \Phi(u_1) + \xi_2 \Phi(u_2)$.

Một toán tử ngẫu nhiên $\Phi : X \to X$ được gọi là toán tử ngẫu nhiên trên X.

2. Một toán tử ngẫu nhiên $\Phi : D(\Phi) \to X$ được gọi là chặn theo xác suất nếu $\lim_{t\to\infty} \sup_{u\in B} P\{\|\Phi u\| > t\} = 0$, với $B = \{u \in D(\Phi) : \|u\| \le 1\}$ là hình cầu đơn vị của $D(\Phi)$.

3. Một toán tử ngẫu nhiên $\Phi : D(\Phi) \to X$ được gọi là bị chặn hầu chắc chắn (viết tắt: a.s) nếu tồn tại biến ngẫu nhiên $\xi \in L_0^+(\Omega)$ sao cho $\|\Phi u\| \le \xi \|u\|$ với $u \in D(\Phi)$.

4. Một toán tử ngẫu nhiên $\Phi : D(\Phi) \to X$ được gọi là đóng nếu mỗi dãy $(u_n) \subset D(\Phi)$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$, $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi u_n = g$, thì $g = \Phi u$.

5. Một toán tử ngẫu nhiên $\Phi : D(\Phi) \to X$ được gọi là liên tục nếu mỗi dãy $(u_n) \subset D(\Phi)$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \in D(\Phi)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi u_n = \Phi u$.

Định lý 1. [4]. Giả sử X là một không gian Banach xác suất và giả sử ta có $\Phi : D(\Phi) \to X$

là một toán tử ngẫu nhiên. Các mệnh đề sau là tương đương:

(i) Φ là bị chặn a.s.

(ii) Φ là bị chặn theo xác suất.

(iii) Φ là liên tục.

2.2. Nửa nhóm liên tục đều của các toán tử ngẫu nhiên

Định nghĩa 4. [4]. Cho X là không gian Banach xác suất và $\{T(t)\}_{t\in[0,+\infty)}$ là họ các toán tử ngẫu nhiên trong không gian Banach xác suất X. Khi đó $\{T(t)\}$ được gọi là nửa nhóm trên X nếu:

1. $T(0)=I$.
2. $T(s+t)=T(s)T(t)\ \forall t,s\geq 0$.
3. Nửa nhóm $\{T(t)\}$ được gọi là liên tục mạnh nếu $u\in X$ thì ánh xạ: $t\to T(t)u$ từ $[0,+\infty)$ vào X là liên tục.
4. Nửa nhóm $\{T(t)\}_{t\in[0,+\infty)}$ được gọi là bị chặn nếu $\exists L>0$ và một biến ngẫu nhiên

$\xi_L\in L_0^+(\Omega)$ phụ thuộc L sao cho $\|T(t)u\|\leq \xi_L\|u\|$, $\forall u\in X$.

Định nghĩa 5. [3]. Cho $\{T(t)\}$ là một nửa nhóm liên tục mạnh trong không gian X. Ta định nghĩa:

$$D(A)=\left\{u\in X:\exists\lim_{t\to 0}\frac{T(t)u-u}{t}\right\}\quad \text{và}\quad Au=\lim_{t\to 0}\frac{T(t)u-u}{t}$$

Thì ánh xạ $A:D(A)\to X$ được gọi là toán tử sinh của nửa nhóm $\{T(t)\}$.

Định nghĩa 6. Một nửa nhóm $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là nửa nhóm liên tục đều nếu:

$$\lim_{t\to 0}\|T(t+h)-T(t)\|=0\ \forall t\geq 0.$$

Nhận xét: Một nửa nhóm liên tục đều là nửa nhóm liên tục mạnh.

Định lý 2. Nửa nhóm liên tục đều khi và chỉ khi $\lim_{t\to 0^+}\|T(t)-I\|=0$.

Chứng minh

Điều kiện cần. Cho $T(t)$ là một nửa nhóm liên tục đều, hiển nhiên ta có: $\lim_{t\to 0^+}\|T(t)-I\|=0$.

Điều kiện đủ. Cho $T(t)$ là nửa nhóm thỏa mãn $\lim_{t\to 0^+}\|T(t)-I\|=0$ ta sẽ chỉ ra $T(t)$ là nửa nhóm liên tục đều.

Thật vậy, với $h\geq 0$ ta có:

$$\|T(t+h)-T(t)\|=\|T(t)(T(h)-I)\|\leq\|T(t)\|\|T(h)-I\|\leq\xi_t\|T(h)-I\|\xrightarrow{P}0$$

$$\|T(t+h)-T(t)\|=\|T(t+h)(I-T(h))\|\leq\|T(t+h)\|\|T(h)-I\|\leq\xi_t\|T(h)-I\|\xrightarrow{P}0$$

Ví dụ: Cho A là toán tử tuyến tính liên tục trong không gian Banach xác suất V. Khi đó $T(t)=e^{tA}:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!}$ là một nửa nhóm liên tục đều.

Chứng minh:1) Chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\|A^k\|}{k!}$ là chuỗi dương hội tụ theo dấu hiệu D'Alembert suy ra e^{tA} tồn tại.

2) $T(t)$ là toán tử tuyến tính, bị chặn trong X. Ta sẽ chứng minh $T(t+s)=T(t).T(s)$ hay $e^{(t+s)A}=e^{tA}.e^{sA}$. Thật vậy:

$$e^{tA}.e^{sA}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}.\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^mA^m}{m!}=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{t^nA^ns^mA^m}{n!m!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}.\frac{s^{k-n}A^{k-n}}{(n-k)!}$$

$(k=m+n, m\geq 0, 0\leq k\leq n)$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!t^{n-k}A^{n-k}}{(n-k)!}.\frac{s^kA^k}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t+s)^nA^n}{n!}=e^{(t+s)A}.$$

$T(t)$ bị chặn vì: $\|T(t)\|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{t^nA^n}{n!}\right\|=e^{tA}.$

3) $T(t)$ là nửa nhóm vì $T(t)$ là toán tử tuyến tính và $T(0)=e^{0.A}=I.$

4) $T(t)$ là liên tục đều $\forall t_0\in[0,+\infty)$, tức là: $\lim_{t\to t_0}e^{tA}=e^{t_0A}$.

Thật vậy:

$$\|e^{tA}-e^{t_0A}\|=\|e^{(t_0+t-t_0)A}-e^{t_0A}\|=\|e^{t_0A}.e^{(t-t_0)A}-e^{t_0A}\|=\|e^{t_0A}(e^{(t-t_0)A}-I)\|\leq\|e^{t_0A}\|\|e^{(t-t_0)A}-I\|$$

Đặt $h=t-t_0\to 0$. Ta sẽ chứng minh $\lim_{h\to 0}e^{hA}=I$.

Thật vậy: $\|e^{hA}-I\|=\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^kA^k}{k!}\right\|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|h|^k\|A\|^k}{k!}=e^{|h|\|A\|}-1$.

Định lý 3. $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là nửa nhóm liên tục đều. Khi đó, $\exists M\in L^+(\Omega)$, $\Delta\in L^+(\Omega)$ sao cho : $\|T(t)\|\leq M.e^{\Delta t}$.

Chứng minh: Chọn $M=Max\{1,\xi_L\}$ nên $M\in L^+(\Omega)$, $M\geq 1$, hơn nữa $\|T(t)\|\leq M, \forall t\in[0,L]$

Bằng phương pháp quy nạp, ta có: $\|T(nt)\|\leq M^n, \forall t\in[0,L], n\in N$

Cố định $t>0$, tồn tại $n\in N$ sao cho $nT\leq t\leq(n+1)T$. Khi đó:

$$\|T(t)\|=\left\|T\left((n+1)\frac{t}{n+1}\right)\right\|\leq M^{n+1}=M.e^{n\ln M}=M.e^{nT\frac{\ln M}{T}}\leq M.e^{\Delta t}\text{ với }\Delta=\frac{\ln M}{T}\in L_0^+(\Omega)$$

Định lý 4. Toán tử A là toán tử sinh của nửa nhóm toán tử liên tục đều trên không gian Banach xác suất X khi và chỉ khi A là toán tử bị chặn.

Chứng minh: Điều kiện đủ, nếu A là toán tử bị chặn thì là A toán tử sinh của nửa nhóm toán tử liên tục đều. Xét nửa nhóm $T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}=e^{tA}$

Ta sẽ chứng minh $T(t)$ nửa nhóm liên tục đều.

Xét $\left\|\frac{T(x)x-x}{t}-Ax\right\|=\left\|\frac{1}{t}\left(\frac{tAx}{1!}+\frac{t^2A^2x}{2!}+...\right)-Ax\right\|=\left\|\frac{Ax}{1!}+\frac{tA^2x}{2!}+\frac{t^2A^3x^3}{3!}+....-Ax\right\|$

$$\Rightarrow\left\|\frac{T(x)x-x}{t}-Ax\right\|=\left\|\frac{tA^2x}{2!}+\frac{t^2A^3x}{3!}+...\right\|=t\left\|\frac{A^2x}{2!}+\frac{tA^3x}{3!}+....\right\|=t\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^{2+k}}{(2+k)!}x\right\|$$

$$\le t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\|A\|^{2+k}\|x\|}{(2+k)!}=tM\|x\|\to 0(t\to 0)\,(M=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\|A\|^{2+k}}{(2+k)!})$$

là chuỗi dương hội tụ.

Điều kiện cần, $T(t)$ là nửa nhóm liên tục đều bất kỳ. Khi đó toán tử sinh A là toán tử bị chặn.

$$\left\|I-\frac{1}{t}\int_0^t T(s)ds\right\|=\left\|\frac{1}{t}\int_0^t\left(I-T(s)\right)ds\right\|\le\frac{1}{t}\int_0^t\|I-T(s)\|ds$$

Do tính liên tục đều $\lim\limits_{s\to 0}\|I-T(s)\|=0\Rightarrow\exists t_0$ sao cho: $\|I-T(s)\|<M<1,\forall s\in[0,t_0]$

$$\Rightarrow\frac{1}{t}\int_0^{t_0}\|I-T(s)\|ds\le M\le 1,\forall t\in[0,t_0]\qquad\Rightarrow\exists\left(I-\frac{1}{t}\int_0^t T(s)ds\right)^{-1},\forall t\in[0,t_0]$$

Ta sẽ chứng minh: $A=\left(T(t_0)-I\right)\left(\int_0^{t_0}T(s)ds\right)^{-1}\in l(X)$.

Thật vậy, vì: $\|A\|<1\Rightarrow\frac{1}{h}\left(T(h)-I\right)\int_0^t T(s)ds=\frac{1}{h}\left(\int_0^t T(s+h)ds-\int_0^t T(s)ds\right)$

$$=\frac{1}{h}\left(\int_h^{t+s}T(s)ds-\int_0^T T(s)ds\right)=\frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h}T(s)ds-\int_0^h T(s)ds\right)$$

$$\frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h}T(s)ds-\int_0^h T(s)ds\right)=\frac{1}{h}\left(\int_0^s T(t+s)ds-\int_0^h T(s)ds\right)$$

$$\frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h}T(s)ds-\int_0^h T(s)ds\right)=\frac{1}{h}\left(\int_0^s T(t+s)ds-\int_0^h T(s)ds\right)$$

$$=\frac{1}{h}\left(T(t)\int_0^h T(s)ds-\int_0^h T(s)ds\right)=\frac{1}{h}\int_0^h T(s)ds\left(T(t)-I\right)$$

Lấy giới hạn hai vế: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(T(h)-I\right)\int_0^t T(s)ds=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)ds\left(T(t)-I\right)$

$$\Rightarrow A\int_0^T T(s)ds=I\left(T(t)-I\right)=T(t)-I$$

$$A=T(t)=\left(T(t)-I\right)\left(\int_0^T T(s)ds\right)^{-1}\in l(X)$$

3. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã trình bày khái niệm nửa nhóm liên tục đều trong không gian Banach xác suất và chứng minh tính chất đặc trưng của toán tử sinh của nửa nhóm liên tục đều và gần đây nhóm chúng tôi đưa ra khái niệm nửa nhóm ngẫu nhiên liên tục mạnh trong không gian Banach xác suất và chứng minh một số tính chất của nó.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] D.H. Thang and T.N. Anh (2010), On random equations and applications to random point theorems, *Random Oper. Stochastic Equations 18,* pp. 199-212.

[2] D.H. Thang, T.C. Son (2016), On the convergence of the product of independent random operators, *Stochas.Int. J.Prob, Stochas. Process.* 88,927-945.

[3] D.H. Thang, T.C .Son và N .Thinh (2019), Semigroups of continuous module Homomorphisms on complex complete random normed modules, *Lithuanian Mathematical Journal*, 59(2): 229 - 250.

[4] D.H. Thang, N .Thinh, Tr.X. Quy (2016), Abstract random linear operators on probabilistic unitary spaces, *J.Korean Math.* Soc. 53,2 347-362.

[5] T.X. Guo. (1996), Module homomorphisms on random normed modules, *China Northeast. Math. J.*, 12 (1): 102-114.

[6] D.H. Thang (1987), Random Operator in Banach spaces, *Probab. Math. Statist.* 8,155-157.

UNIFORMLY CONTINUOUS SEMIGROUPS IN PROBABILITY BANACH SPACES

Le Thi Oanh

ABSTRACT

In this paper, we introduce the notion of uniformly continuous semigroups in probability Banach spaces and prove the common properties of the generator operator of a uniformly continuous semigroup.

Keywords: *Probability Banach spaces, random operators, uniformly continuous semigroup, generator operators.*

** Ngày nộp bài:30/6/2020; Ngày gửi phản biện: 14/7/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020*

** Bài báo này là kết quả nghiên cứu từ đề tài cấp cơ sở mã số ĐT-2019-18 của Trường Đại học Hồng Đức.*