CHỈ SỐ CHÍNH QUY CASTELNOUVO-MUMFORD CỦA IĐÊAN CẠNH VÀ KÍCH THƯỚC NHỎ NHẤT CỦA GHÉP CẶP CỰC ĐẠI CỦA ĐỒ THỊ ĐƠN

Lê Quang Huy[1]

TÓM TẮT

Bài báo trình bày chứng minh chi tiết về chặn trên của chỉ số chính quy Castelnouvo-Mumford của iđêan cạnh với đồ thị đơn G cho trước theo kích thước nhỏ nhất ứng với ghép cặp cực đại của G.

Từ khóa: *Chỉ số chính quy, iđêan cạnh, ghép cặp, đồ thị đơn.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Cho G là một đồ thị đơn và iđêan $I(\mathrm{G})=\left(x_i x_j \mid \{x_i, x_j\} \in E(G)\right)$ gọi là iđêan cạnh của G. Như vậy với mỗi đồ thị đơn G ta luôn xác định được một iđêan đơn thức tương ứng. Việc đánh giá mối liên hệ và sự tương tác giữa G và $I(G)$ như thế nào là vấn đề được nhiều người quan tâm. Có hai hướng thông dụng tiếp cận về vấn đề này là cấu trúc của đồ thị G ảnh hưởng như thế nào đến tính chất của iđêan $I(G)$ và các bất biến của đồ thị G có tác động như thế nào đến các bất biến của iđêan $I(G)$. Trong bài báo này, tác giả tiếp cận theo hướng thứ hai về chặn trên bất biến chỉ số chính quy của iđêan $I(G)$ ứng với đồ thị G là kích thước nhỏ nhất của ghép cặp cực đại trong đồ thị G.

Bài báo và trình bày chi tiết các chứng minh cho chặn trên chỉ số chính quy của $I(G)$ theo kích thước nhỏ nhất của ghép cặp cực đại trong đồ thị G. Các kết quả này được trình bày sơ lược trong [4,5] dưới dạng nhận xét và gợi ý.

Ngoài phần giới thiệu, bài báo chia thành hai mục. Mục 2 giới thiệu một số kiến thức cơ bản về đồ thị, iđêan cạnh, chỉ số chính quy. Mục 3 đưa ra các kết quả chính về chặn trên chỉ số chính quy của $I(G)$ theo kích thước nhỏ nhất của ghép cặp cực đại của đồ thị G, trong các trường hợp G là đồ thị hình sao (Định lý 3.5), G là đồ thị chứa một cạnh là ghép cặp cực đại kích thước 1 của G (Định lý 3.8) và cuối cùng là đồ thị G tổng quát (Định lý 3.9).

2. IĐÊAN CẠNH CỦA ĐỒ THỊ

Trong mục này, chúng ta luôn giả thiết $R=K[x_1,x_2,...,x_n]$ là vành đa thức n biến $x_1,x_2,...,x_n$ trên trường K vô hạn, m là iđêan thuần nhất cực đại của R và A là môđun phân bậc hữu hạn sinh trên R. Các kiến thức cơ bản được trình bày trong [1,2] và các kiến thúc cơ bản về đồ thị được trình bày trong [3,4,5].

[1] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

Định nghĩa 2.1 [1, Section 1] Chỉ số chính quy Casteluovo-Mumford (chính quy) của A là số

$$\operatorname{reg}(A) := \max\left\{a_i(A) + i \mid i \geq 0\right\},$$

Trong đó: $$a_i(A) = \begin{cases} \max\left\{n \mid H_m^i(A)_n \neq 0\right\} & khi\ H_m^i(A) \neq 0, \\ -\infty & khi\ H_m^i(A) = 0. \end{cases}$$

Với cách tiếp cận sử dụng dãy tự do tối tiểu, chỉ số chính quy được xây dựng như sau:

Định nghĩa 2.2. [1, Proposition 1.1 và Theorem 1.2] Cho dãy tự do tối tiểu của E được xác định như sau: $0 \to \bigoplus_{j\in Z} R(-j)^{\beta_{pj}(A)} \to \cdots \to \bigoplus_{j\in Z} R(-j)^{\beta_{0j}(A)} \to A \to 0.$

Khi đó chỉ số chính quy được xác định là: $\operatorname{reg(A)} := \max\left\{j - i \mid \beta_{ij}(A) \neq 0\right\}.$

Từ định nghĩa thứ hai của chỉ số chính quy ta nhận được các kết quả sau:

Bổ đề 2.3. [2] Cho I là iđêan thuần nhất của R, khi đó ta có: $\operatorname{reg}(R/I) = \operatorname{reg}(I) - 1.$

Bổ đề 2.4. [2] Cho u là phần tử thuần nhất bậc d của R, khi đó

i) $\operatorname{reg}(R/(\mathrm{u})) = d - 1.$

ii) $\operatorname{reg}((\mathrm{u})) = d.$

Bổ đề 2.5. [1, Corollary 20.19] Cho dãy khớp: $0 \to P \to M \to N \to 0$ các R-môđun hữu hạn sinh của các đồng cấu thuần nhất. Khi đó

i) $\operatorname{reg}(M) \leq \max\left\{\operatorname{reg}(P), \operatorname{reg}(N)\right\}.$

ii) $\operatorname{reg}(N) \leq \max\left\{\operatorname{reg}(P) - 1, \operatorname{reg}(M)\right\}.$

Từ dãy khớp $0 \to M \to M \oplus N \to N \to 0$, kết hợp với kết quả i) trong bổ đề trên ta nhận đươc kết quả sau:

Hệ quả 2.6. Cho M, N là các R-môđun phân bậc hữu hạn sinh. Khi đó, ta có

$\operatorname{reg}(M \oplus N) \leq \max\left\{\operatorname{reg}(M), \operatorname{reg}(N)\right\}.$

Định nghĩa 2.7. [3,4,5] Đồ thị đơn hữu hạn G là một cặp $(V(G), E(G)) = (V, E)$, trong đó $V = \left\{x_1, x_2, \ldots, x_n\right\}$ gọi là tập đỉnh và E là tập cạnh bao gồm các tập con có 2 phần tử của V có dạng $\left\{x_i, x_j\right\}(i \neq j)$.

Đồ thị $G' = (V(G'), E(\mathrm{G'}))$ gọi là đồ thị con cảm sinh của G nếu $V(G') \subset V(G)$ và $E(G') \subset E(G)$.

Trong bài báo này, ta luôn giả sử đồ thị G là đồ thị đơn.

Định nghĩa 2.8. [3,4,5] Cho đồ thị $G = (V, E)$.

i) x_i gọi là một đỉnh cô lập của G nếu nó không thuộc bất kì cạnh nào của G.

ii) Cho $F=\{G_1,\mathrm{G}_2,...,\mathrm{G}_s\}$ là một họ các đồ thị con của *G*. *F* gọi là một phủ cạnh của *G* nếu $\bigcup_{i=1}^{s} E(G_i)=E(G)$.

iii) Một ghép cặp *M* của đồ thị *G* là một đồ thị con của *G* sao cho $E(M)\subset E(G)$ và mọi cặp cạnh của *M* đôi một rời nhau. Kích thước của một ghép cặp *M* được kí hiệu bởi $m(M)$ là số cạnh của *M*.

Một ghép cặp *M* gọi là cực đại nếu không thể bổ sung thêm cạnh khác của đồ thị *G* để tạo thành một ghép cạnh mới của *G*.

Kích thước nhỏ nhất của ghép cặp cực đại của đồ thị *G* được kí hiệu là

$\beta(G)=\min\{\mathrm{m}(M)\,|\,M$ là ghép cặp cực đại của đồ thị $G\}$.

Định nghĩa 2.9. [4,5] Cho đồ thị *G* = (*V*, *E*). Gọi *e* là một cạnh của *G*.

i) $N(e)=\{x\in V\,|\,\exists y\in e$ sao cho $\{x,y\}\in E(G)\}$ gọi là lân cận mở (gọi tắt là lân cận) của e.

ii) $N[e]=N(e)\cup\{e\}$ gọi là lân cận đóng của *e*.

Định nghĩa 2.10. [4,5] Cho đồ thị *G* = (*V*, *E*). Gọi *e* là một cạnh của *G*.

i) $G\setminus e$ là đồ thị nhận được từ *G* bằng cách xoá đi cạnh *e*, nghĩa là $G\setminus e=\big(V(G),E(G\setminus e)=E(G)\setminus\{e\}\big)$.

ii) G_e là đồ thị con của *G* có tập đỉnh là $V(G_e)=G\setminus N[e]$.

Định nghĩa 2.11. [3,4,5] Cho đồ thị *G*, $I(\mathrm{G})=\big(x_ix_j\,|\,\{x_i,x_j\}\in E(G)\big)$ gọi là iđêan cạnh của đồ thị *G*.

Kí hiệu $\mathrm{reg}(G):=\mathrm{reg}(I(\mathrm{G}))$.

Bổ đề 2.12. [4, Theorem 3.5] Cho đồ thị *G* và *e* là một cạnh của *G*. Khi đó ta có

$\mathrm{reg}(G)\le\max\{2,\mathrm{reg}(G\setminus e),\mathrm{reg}(G_e)+1\}$.

Chứng minh

Giả sử $e=\{x_ix_j\}$. Xét dãy khớp

$$0\to\frac{R}{(x_ix_j)\cap I(G\setminus e)}\to\frac{R}{(x_ix_j)}\bigoplus\frac{R}{I(G\setminus e)}\to\frac{R}{(x_ix_j)+I(G\setminus e)}\to 0.$$

Ta có $(x_ix_j)+I(G\setminus e)=I(G)$ và từ Hệ quả 2.6 ta nhận được

$$\mathrm{reg}\left(\frac{R}{(x_ix_j)}\bigoplus\frac{R}{I(G\setminus e)}\right)\le\max\left\{\mathrm{reg}\left(\frac{R}{(x_ix_j)}\right),\mathrm{reg}\left(\frac{R}{I(G\setminus e)}\right)\right\}.$$

Kết hợp với Bổ đề 2.3 và Bổ đề 2.5 ii) ta có

$$\mathrm{reg}\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{I}(G)}\right)\le\max\left\{\mathrm{reg}\left(\frac{R}{(x_ix_j)\cap I(G\setminus e)}\right)-1,\mathrm{reg}\left(\frac{R}{(x_ix_j)}\right),\mathrm{reg}\left(\frac{R}{I(G\setminus e)}\right)\right\}$$

Ta có : $\left(x_i x_j\right) \cap I\left(G \setminus e\right) = x_i x_j\left(y \mid y \in N\left(e\right) + I\left(G_e\right)\right)$.

Suy ra : $\operatorname{reg}\left(\dfrac{R}{\left(x_i x_j\right) \cap I\left(G \setminus e\right)}\right) = \operatorname{reg}\left(\dfrac{R}{I\left(G_e\right)}\right) + 2$.

Do đó, ta có : $\operatorname{reg}\left(\dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{I}(G)}\right) \leq \max\left\{\operatorname{reg}\left(\dfrac{R}{I\left(G_e\right)}\right) + 2, \operatorname{reg}\left(\dfrac{R}{\left(x_i x_j\right)}\right), \operatorname{reg}\left(\dfrac{R}{I\left(G \setminus e\right)}\right)\right\}$.

Vậy : $\operatorname{reg}(G) \leq \max\left\{2, \operatorname{reg}\left(G \setminus e\right), \operatorname{reg}\left(G_e\right) + 1\right\}$.

Bổ đề 2.13. [4, Corollary 3.7] hoặc [6, Theorem 2]) Giả sử G và $G_1, G_2, ..., G_s$ là các đồ thị đơn trên cùng tập đỉnh V sao cho $E\left(G\right) = \bigcup_{i=1}^{s} E\left(G_i\right)$. Khi đó ta có : $\operatorname{reg}\left(\mathrm{R}/\mathrm{I}\left(G\right)\right) \leq \sum_{i=1}^{s} \operatorname{reg}\left(\mathrm{R}/\mathrm{I}\left(G_i\right)\right)$.

3. CHỈ SỐ CHÍNH QUY CỦA IĐÊAN CẠNH

Bài toán chặn trên chỉ số chính quy theo kích thước nhỏ nhất của ghép cặp cực đại trong G lần lượt được chứng minh cho các lớp đồ thị hình sao, đồ thị chứa ít nhất một ghép cặp cực đại có kích thước 1 và từ đó ta có thể khái quát hoá chứng minh cho trường hợp đồ thị G tổng quát (Xem [4] và [5]).

Trước hết ta cần đến khái niệm đồ thị rút gọn.

Định nghĩa 3.1. Cho G là đồ thị. Đồ thị nhận được từ G bằng cách bỏ đi tập điểm cô lập của G gọi là đồ thị rút gọn của G. Kí hiệu G^{red}.

Bổ đề 3.2. Cho đồ thị G. Ta có $\operatorname{reg}(G) = \operatorname{reg}(G^{\mathrm{red}})$.

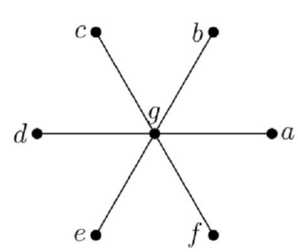
Do đó, trong mục này không mất tính tổng quát, ta luôn giả sử đồ thị G không có điểm cô lập

Bổ đề 3.3. Cho đồ thị G có duy nhất một cạnh. Khi đó $\operatorname{reg}(G) = 2$.

Chứng minh

Giả sử G có cạnh $e = \left\{x_1, x_2\right\}$. Khi đó $G = \left(\left\{x_1, x_2\right\}, \{\mathrm{e}\}\right)$. Suy ra $I\left(G\right) = \left(x_1 x_2\right)$. Áp dụng: Bổ đề 2.4 ii), ta nhận được $\operatorname{reg}(G) = 2$.

Định nghĩa 3.4. Đồ thị G có tất cả các cạnh chung một đỉnh gọi là đồ thị hình sao.



Hình 1. Đồ thị hình sao 6 cạnh

Định lý 3.5. Cho G là đồ thị hình sao. Khi đó $\operatorname{reg}(G) \le 2$.

Chứng minh

Ta chứng minh quy nạp theo số cạnh của G. Giả sử G có m cạnh.

Với $m = 1$, theo Bổ đề 3.3, ta có $\operatorname{reg}(G) = 2$.

Giả sử đúng đến m-1 cạnh, ta cần chứng minh đúng đến m cạnh.

Theo Bổ đề 2.12, $\operatorname{reg}(G) \le \max\left\{2, \operatorname{reg}\left(G \setminus e\right), \operatorname{reg}\left(G_e\right)+1\right\}$.

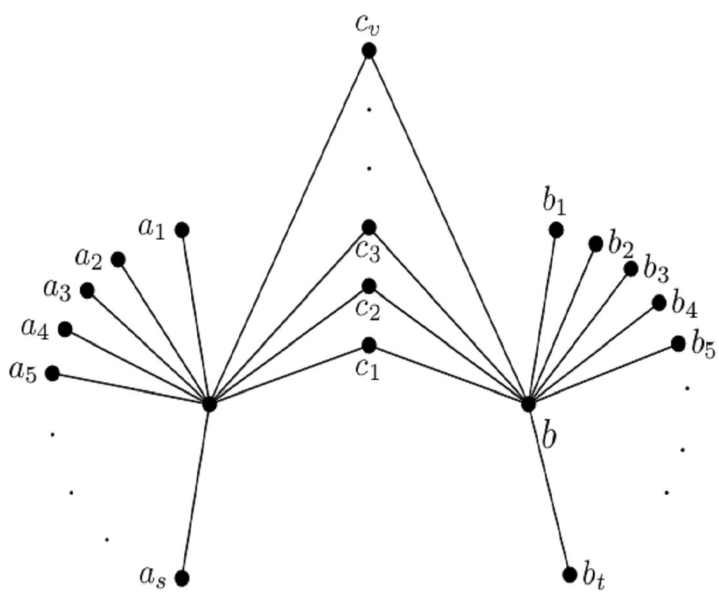
Từ giả thiết quy nạp, ta nhận được $\operatorname{reg}\left(G \setminus e\right) \le 2$.

Mặt khác, vì G_e là đồ thị rỗng, nên $\operatorname{reg}\left(G_e\right) = 0$.

Vậy $\operatorname{reg}(G) \le \max\left\{2,2,1\right\} = 2$.

Đồ thị hình sao là đồ thị có các cạnh đều là các ghép cặp cực đại có kích thước 1. Trong phần tiếp theo, ta quan tâm đến đồ thị tổng quát hơn so với đồ thị hình sao, đồ thị chứa ít nhất một cạnh là ghép cặp cực đại có kích thước 1.

Mệnh đề 3.6. Giả sử cạnh $e = \left\{a, b\right\}$ là một ghép cặp cực đại có kích thước 1 của đồ thị G. Khi đó, các cạnh của đồ thị G luôn chứa đỉnh a hoặc đỉnh b, nghĩa là G có dạng



Hình 2.

Chứng minh

Giả sử G có cạnh e' không chứa đỉnh a hoặc đỉnh b, khi đó {e, e'} lập thành một ghép cặp mới có kích thước 2, mâu thuẫn với {e} là ghép cặp cực đại của G.

Định lý 3.7. Cho đồ thị G. Giả sử cạnh $e = \left\{a, b\right\}$ là một ghép cặp cực đại có độ lớn 1 của đồ thị G. Khi đó $\operatorname{reg}(G) \le 2$.

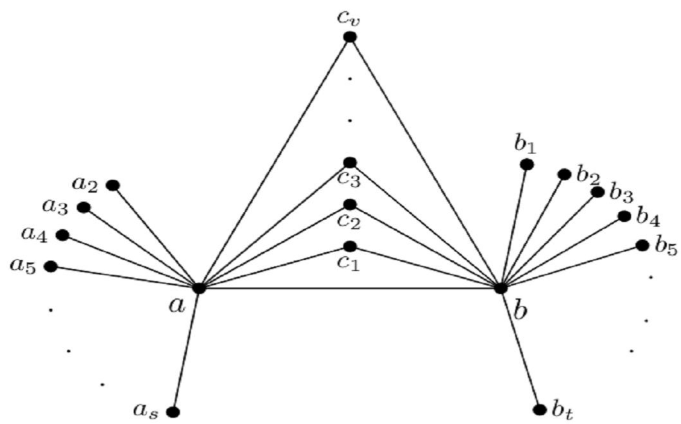
Chứng minh

Ta quy nạp theo số cạnh của tập cạnh $E(G)\setminus\{e\}$.

Giả sử G có một cạnh, khi đó theo Bổ đề 3.3 ta có $\operatorname{reg}(G)\leq 2$.

Giả sử G có nhiều hơn một cạnh khi đó đồ thị có dạng như Hình 2. Ta chia tập cạnh của G thành hai phần $E(G)=E_1\cup E_2$, trong đó, E_1 là tập cạnh mà mỗi cạnh chứa đỉnh a và E_2 là tập cạnh mà mỗi cạnh chứa đỉnh b.

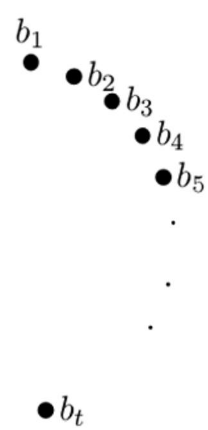
Gọi u là một cạnh của G. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử u thuộc tập cạnh E_1 và $u=\{a,a1\}$. Khi đó $G\setminus u$ có dạng như sau:



Hình 3.

Theo giả thiết quy nạp ta có $\operatorname{reg}(G\setminus u)\leq 2$.

Đồ thị G_u là đồ thị chỉ gồm các đỉnh độc lập như sau



Hình 4.

Áp dụng Bổ đề 3.2 ta có $\operatorname{reg}(G_e)=0$.

Theo Bổ đề 2.12, ta có

$$\operatorname{reg}(G)\leq \max\{2,\operatorname{reg}(G\setminus u),\operatorname{reg}(G_u)+1\}=2.$$

Vậy định lý được chứng minh xong.

Vận dụng các kết quả trên, ta chứng minh được kết quả chính của bài báo như sau:

Định lý 3.8. Giả sử G là một đồ thị đơn. Khi đó ta có $\operatorname{reg}(G) \leq \beta(G)+1$.

Chứng minh

Đặt $\beta := \beta(G)$. Giả sử $\{e_1, e_2, ..., e_\beta\}$ là một ghép cặp cực đại của G. Gọi G_i là đồ thị con cảm sinh của G, trong đó các cạnh của G_i gồm e_i và các cạnh của G có đỉnh là đỉnh thuộc cạnh e_i. Khi đó ta có $\bigcup_{i=1}^{\beta} E(G_i) = E(G)$. Áp dụng Bổ đề 2.13, ta có

$$\operatorname{reg}(\mathrm{R}/\mathrm{I}(G)) \leq \sum_{i=1}^{\beta} \operatorname{reg}(\mathrm{R}/\mathrm{I}(G_i)).$$

Theo Định lý 3.7, ta có $\operatorname{reg}(G_i) \leq 2$, kết hợp với Bổ đề 2.3 suy ra $\operatorname{reg}(\mathrm{R}/\mathrm{I}(G_i)) \leq 1$. Do vậy

$$\operatorname{reg}(\mathrm{R}/\mathrm{I}(G)) \leq \sum_{i=1}^{\beta} \operatorname{reg}(\mathrm{R}/\mathrm{I}(G_i)) \leq \beta.$$

Áp dụng Bổ đề 2.3, ta nhận được $\operatorname{reg}(G) \leq \beta(G)+1$.

4. KẾT LUẬN

Bài toán chặn trên chỉ số chính quy theo kích thước nhỏ nhất của ghép cặp cực đại trong G lần lượt được chứng minh cho các lớp đồ thị hình sao, đồ thị chứa ít nhất một ghép cặp cực đại có kích thước 1 và từ đó ta có thể khái quát hoá chứng minh cho trường hợp đồ thị G tổng quát.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] D. Eisenbud (1995), *Commutative Algebra with a View toward Algebraic Geometry*, Springer-Verlag.

[2] D. Eisenbud), S. Goto (1984), Linear free resolutions and minimal multi-plicity, *J. Algebra*, 88, 89-133.

[3] Herzog, Jürgen, Hibi, Takayuki (2011), *Monomial ideals*, Springer Press, New York.

[4] H.H. Tai (2014), *Connections Between Algebra, Combinatorics, and Geometry*, Springer Press, New York , 76, 251-276.

[5] R. Woodroofe (2014), Matchings, Coverings, and Castelnouvo-Mumford regularity, *Joural of Commutative Algera*, 6 (2), 287-303.

CASTELNOUVEO-MUMFORD REGULARITY OF EDGE IDEAL AND THE MINIMUM SIZE OF A MAXIMAL MATCHING OF SIMPLE GRAPHS

Le Quang Huy

ABSTRACT

This paper gives a detail proof of the upper bound of regularity of edge ideal of simple graphs in term of the minimum size of a maximal matching of simple graphs.

Key words: *Regularity, edge ideal, matching, simple graph.*

** Ngày nộp bài: 7/10/2020; Ngày gửi phản biện: 21/10/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020*

** Bài báo này là kết quả nghiên cứu từ đề tài cấp cơ sở mã số ĐT-2019- của Trường Đại học Hồng Đức.*