MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA HÀM DẪN XUẤT

Nguyễn Mạnh Hùng[1]

TÓM TẮT

Bài báo đưa ra chứng minh cho một số định lý cơ bản về hàm dẫn xuất của đại lượng ngẫu nhiên nhận các giá trị nguyên, không âm.

Từ khóa: *Hàm dẫn xuất, đại lượng ngẫu nhiên nguyên, không âm.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Chúng ta đều biết: mỗi phân phối xác suất đều được xác định một cách duy nhất bởi một hàm đặc trưng $\varphi(t) = E\left(e^{itX}\right)$. Tuy nhiên việc nghiên cứu các hàm đặc trưng nói chung phức tạp và đòi hỏi vận dụng lý thuyết hàm biến phức.

Đối với các đại lượng ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên, không âm có một cách khác đơn giản hơn để nghiên cứu phân phối xác suất, đó là nghiên cứu thông qua những hàm biến thực dạng đa thức hoặc chuỗi, gọi là các hàm dẫn xuất. Trong bài báo này chúng tôi chứng minh các tính chất cơ bản của hàm dẫn xuất mà trong tài liệu [1] không trình bày hoặc trình bày chưa cụ thể.

2. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

Định nghĩa 2.1. [1] Cho đại lượng ngẫu nhiên X nhận các giá trị nguyên, không âm với $P(X=i)=p_i,\ (i=0,1,2,\ ...)$. Hàm số $f(s)=Es^X=\sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i$ được gọi là hàm dẫn xuất của đại lượng ngẫu nhiên X.

Nhận xét 2.1. Nếu $f(s)$ là hdx của đại lượng ngẫu nhiên X thì $f(e^{it})$ là hàm đặc trưng của nó.

Ví dụ 2.1. Cho đại lượng ngẫu nhiên X có phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,1	0,15	0,25	0,2	0,1	0,2

Theo định nghĩa 1.1, hàm dẫn xuất của X là

$$f(s)=Es^X=0,1+0,15s+0,25s^2+0,2\ s^3+0,1\ s^4+0,2s^5.$$

Ví dụ 2.2. [2] Cho đại lượng ngẫu nhiên X có phân phối xác suất nhị thức với tham số (n,p). Theo định nghĩa 1.1, hàm dẫn xuất của X là

$$f(s)=Es^X=\sum_{i=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} s^i=\sum_{i=0}^{n} C_n^i (ps)^i q^{n-i}.$$

[1] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

Biểu thức cuối cùng chính là khai triển nhị thức Newton $(ps+q)^n$.

Vậy hàm dẫn xuất của đại lượng ngẫu nhiên có phân phối nhị thức với tham số (n,p) là $f(s)=(ps+q)^n$.

Ví dụ 2.3. Cho đại lượng ngẫu nhiên X có phân phối xác suất Poisson với tham số $\lambda>0$. Theo định nghĩa 1.1, hàm dẫn xuất của X là

$$f(s)=Es^X=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}s^i=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda s)^i e^{-\lambda}}{i!}=e^{-\lambda}.e^{\lambda s}=e^{\lambda(s-1)}.$$

Vậy hàm dẫn xuất của đại lượng ngẫu nhiên có phân phối Poisson với tham số $\lambda>0$ là: $f(s)=e^{\lambda(s-1)}$.

Định nghĩa 2.2. ([1]) Cho đại lượng ngẫu nhiên X nhận các giá trị nguyên không âm với $P(X>i)=q_i$, $(i=0,1,2,...)$. Hàm số $g(s)=\sum_{i=0}^{\infty}q_i s^i$ được gọi là hàm dẫn xuất phụ của đại lượng ngẫu nhiên X.

Ví dụ 2.4. Cho đại lượng ngẫu nhiên X có phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2
P	0,1	0,5	0,4

X	0	1	2
Q	0,9	0,4	0

Theo định nghĩa 1.2, hàm dẫn xuất của X là: $g(s)=0,9+0,4s$.

Ví dụ 2.5. Cho đại lượng ngẫu nhiên X có phân phối xác suất Poisson với tham số $\lambda>0$. Theo Định nghĩa 1.2, hàm dẫn xuất của X là

$$g(s)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=i+1}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right)s^i=\cdots=\frac{1-e^{\lambda(s-1)}}{1-s}.$$

Hàm dẫn xuất phụ của đại lượng ngẫu nhiên có phân phối Poisson với tham số $\lambda>0$ là

$$g(s)=\frac{1-e^{\lambda(s-1)}}{1-s}.$$

Nhận xét 2.2. *a) Hàm dẫn xuất* $f(s)$ *xác định ít nhất trên đoạn* $[-1;1]$.

b) Hàm dẫn xuất phụ $g(s)$ *xác định ít nhất trên đoạn* $[-1;1]$.

c) Chuỗi hàm $\sum_{i=0}^{\infty}p_i.s^i$ *hội tụ đều trên đoạn* $[\alpha;\beta]\subset[-1;1]$ *về hàm* $f(s)$, *do đó ta có thể lấy đạo hàm 2 vế* $f'(s)=\sum_{i=0}^{\infty}i.p_i.s^{(i-1)}$. *Thay* $s=1$ *vào công thức trên ta được* $f'(1)=\sum_{i=0}^{\infty}i.p_i$. *Suy ra* $EX=f'(1)$. *Vậy* $f'(s)$ *xác định tại* $s=1$ *khi và chỉ khi* EX *tồn tại.*

Định lí 2.1. [1] *Cho* $f(s), g(s)$ *lần lượt là hàm dẫn xuất và hàm dẫn xuất phụ của đại lượng ngẫu nhiên* X. *Khi đó nếu* $|s|<1$ *thì* $g(s)=\dfrac{1-f(s)}{1-s}$.

Chứng minh. Ta có $g(s)=\sum_{i=0}^{\infty} q_i s^i = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=i+1}^{\infty} p_i\right)s^i$.

Do đó: $g(s)=(1-p_0)+(1-p_0-p_1)s+(1-p_0-p_1-p_2)s^2+\cdots$

$$=(1+s+s^2+\cdots)-p_0(1+s+s^2+\cdots)-p_1(s+s^2+\cdots)-p_2(s^2+\cdots)-\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{1-s}\right)-p_0\left(\frac{1}{1-s}\right)-p_1\left(\frac{s}{1-s}\right)-p_2\left(\frac{s^2}{1-s}\right)-\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{1-s}\right)\left(1-p_0-p_1s-p_2s^2-\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1-s}\right)\left(1-\sum_{i=0}^{\infty}p_is^i\right)$$

$$=\frac{1-f(s)}{1-s}.$$

Định lý được chứng minh.

Định lí 2.2. [1] *Cho* X *là đại lượng ngẫu nhiên nhận các giá trị nguyên không âm. Nếu* EX *tồn tại thì* $g(s)$ *xác định tại* $s=1$ *và* $EX=g(1)$.

Chứng minh. Nếu EX tồn tại, dễ thấy

Do đó $EX=\lim\limits_{s\to 1}\dfrac{f(s)-f(1)}{s-1}=\lim\limits_{s\to 1}\dfrac{f(s)-1}{s-1}=\lim\limits_{s\to 1}\dfrac{1-f(s)}{1-s}$

Từ định lý 2.1 suy ra: $EX=\lim\limits_{s\to 1}g(s)=g(1)$.

Định lý được chứng minh.

Định lí 2.3. [1]) *Cho* X *là đại lượng ngẫu nhiên nhận các giá trị nguyên không âm. Nếu* DX *tồn tại thì* $f'(s), g'(s)$ *xác định tại* $s=1$ *và*

$$DX=f''(1)+f'(1)-\left(f'(1)\right)^2=2g'(1)+g(1)-\left(g(1)\right)^2.$$

Chứng minh. Ta có

$$DX=E\left(X-EX\right)^2$$

$$=EX^2-2E\left(X.EX\right)+\left(EX\right)^2 \quad \text{(Xem [1])}$$

$$=EX^2-\left(EX\right)^2$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}i^2.p_i-\left(f'(1)\right)^2 \quad \text{(xem Định lý 2.2)}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1).p_i + \sum_{i=0}^{\infty} i.p_i - \left(f'(1)\right)^2$$

$$= f''(1) + f'(1) - \left(f'(1)\right)^2.$$

(Do DX tồn tại nên $f'(1)$ tồn tại hay $f'(s)$ xác định tại $s=1$).

Tiếp theo, từ Định lý 2.1 ta có $g(s) = \dfrac{1-f(s)}{1-s}$.

Suy ra: $f(s) = 1 - g(s) + s.g(s)$

$f'(s) = -g'(s) + g(s) + s.g'(s)$

$f''(s) = -g''(s) + 2g'(s) + s.g''(s)$.

Do $f''(s)$ xác định tại $s=1$ nên $f''(1) = 2g'(1)$, do đó $g'(s)$ xác định tại $s=1$ và ta có:

$$DX = f''(1) + f'(1) - \left(f'(1)\right)^2$$
$$= 2g'(1) + g(1) - \left(g(1)\right)^2.$$

Vậy $DX = f''(1) + f'(1) - \left(f'(1)\right)^2 = 2g'(1) + g(1) - \left(g(1)\right)^2$.

Định lý được chứng minh.

Định lí 2.4. [1] *Cho X, Y là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập nhận các giá trị nguyên không âm với $P(X=i) = p_i$ và $P(Y=i) = q_i$. Đặt $Z = X+Y$ thì hàm dẫn xuất của đại lượng ngẫu nhiên Z là $f_Z(s) = f_X(s).f_Y(s)$, (với $f_X(s), f_Y(s)$ lần lượt là hai hàm dẫn xuất của hai đại lượng ngẫu nhiên X, Y).*

Chứng minh

Ta có $f_Z(s) = f_{X+Y}(s) = Es^{(X+Y)}$.

Suy ra $f_Z(s) = E\left(s^X.s^Y\right)$.

Nên $f_Z(s) = E\left(s^X\right).E\left(s^Y\right)$(vì X, Y là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập, xem [2])

Do đó $f_Z(s) = f_X(s).f_Y(s)$.

Định lý được chứng minh.

Định lí 2.5. [1] *Nếu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là n đại lượng ngẫu nhiên độc lập nhận các giá trị nguyên không âm và $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ thì hàm dẫn xuất của đại lượng ngẫu nhiên*

X là $f_X(s)=\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(s)$, (với $f_{X_i}(s)$ là hàm dẫn xuất của hai đại lượng ngẫu nhiên X_i, $i=\overline{1,n}$).

Định lý 2.5 là mở rộng đơn giản Định lý 2.4, do đó việc chứng minh Định lý 2.5 hoàn toàn dựa trên chứng minh của Định lý 2.4.

Vậy hàm dẫn xuất của tổng các đại lượng ngẫu nhiên độc lập bằng tích các hàm dẫn xuất của từng đại lượng ngẫu nhiên thành phần.

Hệ quả 2.1. *Nếu $X_1, X_2, ..., X_n$ là n đại lượng ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối xác suất thì hàm dẫn xuất của $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ (tổng các đại lượng ngẫu nhiên đó) là $f_X(s)=\left(f(s)\right)^n$, với $f(s)$ là hàm dẫn xuất chung của các đại lượng ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Feller W. (1957), *An Introduction to Variational the probability theory and its applications,* V. I. 2nd ed. John Wiley and Sons, Inc., New York; Chapman and Hall, Ltd., London.

[2] Phạm Văn Kiều (2000), *Xác suất thống kê*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.

[3] Kagan A. M., Linnik Yu. V., Rao R. (1972), *Các bài toán đặc trưng của thống kê toán học (Tiếng Nga)*, Moskva, "Nauka".

SOME BASIC PROPETIES FOR GENERATING FUNCTION

Nguyen Manh Hung

ABSTRACT

In this paper, we present proofs of some basic results for generating function of random variables receiving integer and non-negative values.

Keywords: *Generating function, random variable receiving integer, non-negative values.*

** Ngày nộp bài: 15/10/2019; Ngày gửi phản biện: 25/11/2019; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020*