MÔ HÌNH TĂNG TRƯỞNG SOLOW NGẪU NHIÊN

Hoàng Diệu Hồng[1]

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ sử dụng công cụ của lý thuyết hệ động lực ngẫu nhiên để phân tích chi tiết mô hình tăng trưởng kinh tế Solow và nghiên cứu chuyển động đồng thời của nhiều quỹ đạo của các quá trình tiến hóa theo thời gian trong mô hình tăng trưởng kinh tế Solow.

Từ khóa: *Hàm phi tuyến, nhiễu, quỹ đạo, dáng điệu dài hạn của các quỹ đạo.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Tăng trưởng kinh tế là mục tiêu của tất cả các quốc gia. Mô hình kinh tế Solow đưa ra để giải thích sự tăng trưởng kinh tế dài hạn bằng cách nghiên cứu quá trình tích lũy vốn, lao động hoặc tăng trưởng dân số và sự gia tăng năng suất lao động. Mô hình tăng trưởng kinh tế Solow có ý nghĩa quan trọng đối với nền kinh tế Việt Nam đang trong thời kỳ quá độ lên chủ nghĩa xã hội. Trong giai đoạn này, sự đóng góp của vốn vào tốc độ phát triển kinh tế hay sự tăng trưởng của nền kinh tế là đáng kể. Trong mô hình tăng trưởng kinh tế của Solow công nghệ được coi là biến ngoại sinh, vì vậy nó rất phù hợp với thực trạng của nền kinh tế Việt Nam từ trước đến nay chủ yếu nhập công nghệ từ nước ngoài. Mặt khác, mô hình này còn đưa ra phương pháp hoạch toán tăng trưởng, cho phép xác định và tính toán sự đóng góp của các yếu tố đầu vào đã được sử dụng. Như vậy, có thể sử dụng phương pháp này để xác định, tính toán, đánh giá vai trò của các nguồn tăng trưởng trong nền kinh tế Việt Nam. Chính vì thế mô hình tăng trưởng kinh tế Solow được lựa chọn làm cơ sở lý thuyết cho việc xác định, đánh giá vai trò của các nguồn lực đối với tăng trưởng kinh tế Việt Nam.

Mục tiêu của bài báo là sử dụng công cụ của lý thuyết hệ động lực ngẫu nhiên để phân tích chi tiết mô hình tăng trưởng kinh tế Solow. Điểm mấu chốt ở đây là thay vì nghiên cứu chỉ một quỹ đạo thì ta nghiên cứu chuyển động đồng thời của nhiều quỹ đạo của các quá trình tiến hóa theo thời gian trong mô hình tăng trưởng kinh tế Solow.

2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Sự tăng trưởng kinh tế

Xét một nền kinh tế bao gồm các gia đình và các công ty đồng nhất như nhau. Bởi vậy, những cá thể coi như giá cả là đã được biết khi họ tiêu thụ, đầu tư, hoặc

[1] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

quyết định sản xuất. Có một sản phẩm thuần nhất và duy nhất trong nền kinh tế, mà nó có thể được tiêu thụ hoặc sử dụng như đầu vào chính trong sản xuất. Hai nhân tố là tiền vốn và nhân công cần phải có cho quá trình sản xuất.

Công nghệ được miêu tả bởi hàm sản xuất $Y_t = F(K_t, L_t, z_t, a_t)$ .Trong đó K_t và L_t là tiền vốn và nhân công tại thời điểm t; z_t, a_t là độ đo năng suất lao động và trạng thái của tiến bộ công nghệ; L_t, z_t, a_t là những biến ngẫu nhiên. Với mỗi z_t, a_t thì Y_t là đầu ra tổng hợp tại thời điểm t với điều kiện K_t vốn và L_t nhân công đã được sử dụng trong quá trình sản xuất. Ta giả thiết rằng với mỗi cặp (z_t, a_t) hàm Y_t là tân cổ điển và thuần nhất tuyến tính.

Hàm sản xuất F được gọi là *tân cổ điển* nếu nó đưa ra đại lượng dương giảm dần các sản phẩm thặng dư, tức là

$$d_K F > 0,\ d_{KK}{}^2 F < 0,\ d_L F < 0, d_{LL}{}^2 F\ < 0,$$

Thuần nhất tuyến tính, nghĩa là

$$\lambda F(K, L, z, a) = F(\lambda K, \lambda L, z, a),\ \forall \lambda > 0\,.$$

Chúng ta giới hạn phân tích của chúng ta cho một công ty điển hình. Giả sử rằng nền kinh tế là đóng, tức là vốn đầu tư tại thời điểm *t*+1 bằng nguồn tài sản chưa tiêu thụ trong các giai đoạn trước đó. Quy luật vận động của tiền vốn được cho bởi công thức.

$$K_{t+1} = F(K_t, L_t, z_t, a_t) + (1-\delta_t)K_t - C_t \qquad (2.1)$$

Trong đó, δ_t là tốc độ mất giá của vốn đầu tư tại thời điểm *t* và C_t là tổng hợp tiêu thụ tại thời điểm *t*. Trong (2.1), ta giả thiết tổng mức đầu tư bằng tổng tiết kiệm của các hộ gia đình. Công ty xác nhận nhu cầu của họ về vốn và sức lao động bằng cách tối đa hóa lợi nhuận vào mỗi thời kỳ. Giả thiết rằng thị trường là cạnh tranh hoàn hảo, tiền vốn và sức lao động thu được từ sản phẩm thặng dư của họ trong trạng thái tự nhiên, tức là:

$$r_t = d_K F(K_t, L_t, z_t, a_t)\,,$$

$$\mathrm{w}_t = d_L F(K_t, L_t, z_t, a_t)\,,$$

Trong đó, các biến ngẫu nhiên r_t, w_t là ký hiệu lãi suất thực và tiền lương thực.

2.2. Mô hình Solow ngẫu nhiên

Trong mô hình tăng trưởng chúng ta giả sử rằng dáng điệu của các hộ gia đình được miêu tả bởi sự tiêu thụ của một phần $1-s_t$ của tổng sản phẩm trong mỗi giai đoạn. Ta còn giả thiết thêm rằng các hộ gia đình không bị thiếu tiện ích trong công việc sản xuất và có thể được sử dụng hết nhân công của họ. Ta đưa ra một giả thiết cụ thể như sau: Hàm sản xuất được cho bởi công thức

$$F(K_t, L_t, z_t, a_t) = g(z)F(K, aL) \qquad (2.2)$$

Trong đó, g là một hàm đo được, còn F là một hàm tân cổ điển. Điều đó có nghĩa là tiến bộ kỹ thuật là bổ sung cho nhân công và các biến động sản xuất tham gia vào hàm sản xuất một cách nhân tính. Sự tiến hóa của nhân công có kỹ thuật, $a_t L_t$ được cho bởi $a_{t+1}L_{t+1} = (1+n_1)a_t L_t$ và biến ngoại sinh $(n_t, \delta_t, s_t g(z_t))$ được mô tả bởi quá trình ergodic.

Giả thiết về khả năng tiêu thụ của hộ gia đình là tương thích với giả thiết rằng vốn tư bản là không khả nghịch, tức là sản lượng trong mỗi giai đoạn là có thể tiêu thụ trong khi vốn tư bản mà không mất giá thì không thể tiêu thụ được.

Ta định nghĩa vốn tư bản cho mỗi lao động có kỹ thuật là $k_1 = \dfrac{K_1}{a_1 L_1}$, và nó được gọi là cường độ vốn tư bản. Với giả thiết trên, từ (3.1) ta có quy tắc ngẫu nhiên cho cường độ tiền vốn như sau

$$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{a_{t+1}L_{t+1}} = \frac{(1-\delta_t)K_t + s_t g(z_t)F(K_t, a_t L_t)}{(1+n_t)a_t L_t}$$
$$= \frac{(1-\delta_t)k_t + s_t g(z_t) f(k_t)}{(1+n_t)}$$

Ở đây $f(k) := F(k,1)$. Hàm $f(k)$ là hàm sản xuất tân cổ điển.

Giả sử (Ω, F, P, θ) là hệ động lực ergodic; δ, ξ, n là các biến ngẫu nhiên sao cho $\delta(\theta^t\omega)$ là tốc độ của sự mất giá, $\xi(\theta^t\omega)f(k_t)$ là ε phần của tổng sản phẩm được giành cho đầu tư, và $n(\theta^t\omega)$ là tốc độ tăng trưởng của lao động có kỹ thuật. Với một trạng thái ban đầu k_0 cho trước của cường độ tiền vốn, sự tiến hóa ngẫu nhiên của cường độ tiền vốn được cho bởi phương trình sai phân ngẫu nhiên

$$k_{t+1} = \frac{(1-\delta(\theta^t\omega))k_t + \xi(\theta^t\omega))f(k_t)}{1+n_t(\theta^t\omega)} \tag{2.3}$$

Phương trình (2.3) được gọi là *mô hình Solow ngẫu nhiên*. Nó sinh ra một hệ động lực ngẫu nhiên trên R_+ khi ta đặt các điều kiện thích hợp lên các tham số.

Định nghĩa 1. Mô hình Solow ngẫu nhiên được cho bởi công thức

$$k_{t+1} = \frac{(1-\delta(\theta^t\omega))k_t + \xi(\theta^t\omega))f(k_t)}{1+n_t(\theta^t\omega)} = h(\theta^t\omega, k_t) \tag{2.4}$$

Ở đây, k_t là cường độ vốn tư bản (tiền vốn cho mỗi người làm việc trong giai đoạn t). Phương trình (2.4) là phương trình sai phân ngẫu nhiên phi tuyến mô tả sự tiến hóa ngẫu nhiên của cường độ tiền vốn k_t theo thời gian t. Hàm $f : R_+ \longrightarrow R_+$ là một hàm tân cổ điển.

Các quá trình $\delta(\theta^t\omega)$, $\xi(\theta^t\omega)$, $n(\theta^t\omega)$ là các quá trình ergodic, là mô hình sự biến động dừng của tỷ lệ mất giá, tỷ phần đầu tư của tổng sản phẩm và tỷ lệ phát triển dân cư. Tỷ phần đầu tư của tổng sản phẩm $\xi(\theta^t\omega)f(k_1)$ mô tả một tỷ lệ tích lũy ngẫu nhiên và biến động nhân tính của kỹ thuật. Trường hợp $f(0)=0$ tương ứng với một nền kinh tế mà không thể sản xuất sản phẩm khi không có vốn. Trường hợp $f(0)>0$ thì có thể sản xuất ra sản phẩm với nhân công là đầu vào duy nhất. Trạng thái 0 là trạng thái bất động đối với mọi dãy biến động ngẫu nhiên nếu $f(0)=0$. Khi $\delta(\omega)\equiv\delta,\ \xi(\omega)\equiv\xi,\ n(\omega)\equiv n$, (2.4) là mô hình Solow tất định.

Mệnh đề 2. [3] *Giả sử rằng f là hàm dương tăng dần, lõm chặt và có đạo hàm liên tục trên* R_{++} *.Nếu* $\delta+n>0,\ s>0$ *và f thỏa mãn điều kiện Inada*

$$0\le\lim_{k\to\infty}f'(k)<\frac{\delta+n}{s}<\lim_{k\to0}f'(k)\le\infty,$$

thì mô hình Solow tất định có một điểm bất động không tầm thường duy nhất $\bar{k}(\delta,n,s)$*. Điểm bất động là ổn định và hút toàn cục trên* R_{++}*. Nếu* $f(0)>0$ *thì không cần đặt điều kiện lên* $\lim_{k\to0}f'(k)$ *và* $\bar{k}(\delta,n,s)$ *là hút toàn cục trên* R_{+}*.*

2.3. Định lý điểm bất động ngẫu nhiên

Định lý này là trường hợp của định lý điểm bất động Banach cho hệ ngẫu nhiên phi tuyến. Cho $G(\omega)\subset R^d,\ \ \omega\in\Omega$, là một tập ngẫu nhiên, tức là $G(\omega)$ là tập đóng hầu chắc chắn và $\{\omega|G(\omega)\cap U=\phi\}$ là đo được với mọi tập mở U. Trong bài báo này, chúng ta sẽ xét biến ngẫu nhiên $g(\omega)$ với giá trị trong $G(\omega)$. Giả sử θ là một hệ động lực ergodic. Khi đó mọi quỹ đạo $g(\theta^t\omega),\ t\in Z$, của biến ngẫu nhiên: $g:\Omega\to R^d$ hoặc là tăng nhanh hơn mọi hàm số mũ. Tức là $\limsup_{t\to\infty}\frac{\log^+\|g(\theta^t\omega)\|}{t}=\infty$ hầu chắc chắn. Hoặc là tăng chậm hơn mọi hàm số mũ: (tức là $\limsup_{t\to\infty}\frac{\log^+\|g(\theta^t\omega)\|}{t}=0$ hầu chắc chắn).

g được gọi là *tempered* nếu:

$\lim_{t\to\infty}e^{-\delta t}\|g(\theta^t\omega)\|=0$ với mọi $\delta>0$.

H:={ Tất cả các biến ngẫu nhiên *tempered* $g(\omega)$ thỏa mãn $g(\omega)\in G(\omega)$ }.

Tính *tempered* yếu hơn tính khả tích.

Định lý 3. *Cho* Φ *là một hệ động lực ngẫu nhiên và ánh xạ* $x\mapsto\Phi(1,\omega,x)$ *là khả vi liên tục hầu chắc chắn và θ là ergodic. Giả sử tồn tại một tập ngẫu nhiên* $G(\omega),\ \omega\in\Omega$ *sao cho H là một tập không rỗng và thỏa mãn:*

1) $\Phi(1,\theta^{-1}\omega,g(\theta^{-1}\omega))\in H\ \ \forall\ g\in G$
2) $\sup_{x\in G(\omega)}\log\|d_x\Phi(1,\omega,x)\|\le C(x)$ *khi* $EC(x)<0$

3) *Nếu với một* $g \in H$ *nào đó mà có* $\Phi(1, \theta^{-1}\omega, g(\theta^{-1}\omega))$ *là dãy Cosi thì với mọi* $\omega \in \Omega$*, giới hạn của dãy đó là thuộc H.*

Khi đó tồn tại một biến ngẫu nhiên $g^* \in H$ *hầu chắc chắn sao cho*

(a) $\Phi(1, \omega, g^*(\omega)) = g^*(\theta\omega)$

(b) $\lim_{t\to\infty} \left\| \Phi(t, \omega, g(\omega)) - g^*(\theta^t\omega) \right\| = 0 \quad \forall g \in H$

(c) $g^*(\omega)$ *là xác định duy nhất.*

Các điều kiện 1), 3) là các điều kiện về tính bất biến, tính co đều trung bình và tính đầy đủ. Kết luận khẳng định về sự tồn tại một điểm bất động ngẫu nhiên g^* mà có H là tập con của miền hút của nó. Với nhiễu tầm thường định lý này chính là định lý Banach về điểm bất động đối với ánh xạ khả vi.

Dáng điệu dài hạn của quỹ đạo với giá trị khởi đầu $g(\omega) \in G(\omega)$ là hoàn toàn xác định bởi quỹ đạo $g^*(\theta^t\omega)$. Trong trường hợp đặc biệt ta có:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \Phi(s, \omega, g(\omega)) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} g^*(\theta^s\omega) = Eg^*,$$

Và như vậy nó là hằng số hầu chắc chắn nếu g^* là khả tích. Nếu $g^*(\omega) > 0$ thì tốc độ tăng trưởng

$$\gamma_{g^*}(\omega) = \frac{g^*(\theta\omega) - g^*(\omega)}{g^*(\omega)} \text{ là } \textit{tempered,}$$

Do tính *tempered* của g^* và $E\log(1 + \gamma g^*(\omega)) = 0$ nếu $\log g^*$ là khả tích.

Chứng minh

Với $\varepsilon > 0$, $g_1 \in \mathrm{H}$, $g_2 \in H$, $\exists\, i_0(\omega, \varepsilon, \mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2)$ sao cho với $i > i_0$

$$d_\omega(\Phi(\mathrm{i}, \theta^{-i}\omega, g_1(\theta^{-i}\omega)), \Phi(\mathrm{i}, \theta^{-i}\omega, g_2(\theta^{-i}\omega)))$$

$$\le d_\omega(\Phi(1, \theta^{-1}\omega, \Phi(i-1, \theta^{-i}\omega, g_1(\theta^{-i}\omega)),\ \Phi(1, \theta^{-1}\omega, \Phi(i-1, \theta^{-i}\omega, g_2(\theta^{-i}\omega))))$$

$$\le e^{k(\theta^{-1}\omega)} d_{\theta^{-1}\omega}(\Phi(\mathrm{i}-1, \theta^{-i}\omega, \mathrm{g}_1(\theta^{-i}\omega)), \Phi(\mathrm{i}-1, \theta^{-i}\omega, g_2(\theta^{-i}\omega)))$$

$$\le \exp(\sum_{j=1}^{i} k(\theta^{-j}\omega) d_{\theta^{-i}\omega}(\mathrm{g}_1(\theta^{-i}\omega)), \mathrm{g}_2(\theta^{-i}\omega)) < \mathrm{e}^{(\frac{1}{2})\mathrm{Ki}} < \varepsilon \ (*)$$

Do tính *tempered* của $\omega \to d_\omega(g_1(\omega), \mathrm{g}_2(\omega))$

Từ (*) suy ra

$$d_\omega(\Phi(\mathrm{i}, \theta^{-i}\omega, g(\theta^{-i}\omega)), \Phi(\mathrm{i}+1, \theta^{-i-1}\omega, g(\theta^{-i-1}\omega)))$$

$$\le \exp(\sum_{j=1}^{i} k(\theta^{-j}\omega)) d_{\theta^{-i}\omega}(\mathrm{g}(\theta^{-i}\omega), \Phi(1, \theta_{-i-1}\omega, \mathrm{g}(\theta^{-i-1}\omega))) \ (**)$$

Với $0 \le t \le t_1$ và do (*), (**), ta có

$$d_{\omega}(\Phi(\mathrm{t},\theta^{-t}\omega,g(\theta^{-t}\omega)),\Phi(t_1,\theta^{-t_1}\omega,g(\theta^{-t_1}\omega)))\le \exp(\sum_{j=1}^{[\mathrm{t}]}k(\theta^{-j}\omega))$$

$$\times\, d_{\theta^{-[\mathrm{t}]}\omega}(\Phi(\mathrm{t}-[\mathrm{t}],\theta^{-t+[\mathrm{t}]}\theta^{-[\mathrm{t}]}\omega,g(\theta^{-t+[\mathrm{t}]}\theta^{-[\mathrm{t}]}\omega)),\Phi(\mathrm{t}_1-[\mathrm{t}],\theta^{-t_1+[\mathrm{t}]}\theta^{-[\mathrm{t}]}\omega,g(\theta^{-t_1+[\mathrm{t}]}\theta^{-[\mathrm{t}]}\omega)))$$

$$\le \exp(\sum_{j=1}^{[\mathrm{t}]}k(\theta^{-j}\omega))\times d_{\theta^{-[\mathrm{t}]}\omega}(\Phi(\mathrm{t}-[\mathrm{t}],\theta^{-t+[\mathrm{t}]}\theta^{-[\mathrm{t}]}\omega,g(\theta^{-t+[\mathrm{t}]}\theta^{-[\mathrm{t}]}\omega)),g(\theta^{-t}\omega))$$

$$+\sum_{j=0}^{-[\mathrm{t}_1]-[\mathrm{t}]-1}d_{\theta^{-[\mathrm{t}]}\omega}(\Phi(j,\theta^{-t-[\mathrm{t}]}\omega,g(\theta^{-t-j}\omega)),\Phi(j+1,\theta^{-t-j-1}\omega,g(\theta^{-[\mathrm{t}]-j-1}\omega))),\Phi(j+1,\theta^{-[t]-j-1}\omega,g(\theta^{-[\mathrm{t}]-j-1}\omega)))$$

$$+\,d_{\theta^{-[\mathrm{t}]}\omega}(\Phi([\mathrm{t}_1]-[\mathrm{t}],\theta^{-[\mathrm{t}_1]}\omega,g(\theta^{-[t_1]}\omega)),\Phi(\mathrm{t}_1-[\mathrm{t}],\theta^{-t_1+[\mathrm{t}]}\theta^{-[\mathrm{t}]}\omega,g(\theta^{-t_1+[\mathrm{t}]}\theta^{-[\mathrm{t}]}\omega))))$$

Đặt $i=[\mathrm{t}]$, $\mathrm{h}(\omega):=2\sup_{s\in[0,1]}d_{\omega}(\Phi(\mathrm{s},\theta^{-s}\omega,\mathrm{g}(\theta^{-s}\omega)),\mathrm{g}(\omega)))$

Với $t_1\ge t$,

$$d_{\omega}(\Phi(\mathrm{t},\theta^{-t}\omega,g(\theta^{-t}\omega)),\Phi(t_1,\theta^{-t_1}\omega,g(\theta^{-t_1}\omega)))$$

$$\le \exp(\sum_{j=1}^{i}k(\theta^{-j}\omega))\sum_{m=0}^{\infty}(\exp(\sum_{j=1}^{m}k(\theta^{-i-j}\omega)l(\theta^{-i-m}\omega)=\mathrm{M}$$

M là hữu hạn với $t\ge 0$ do tính *tempered* của $\mathrm{h}(\omega)$

$$\sum_{j=1}^{m}k(\theta^{-i-j}\omega)\approx Kn\to-\infty,\ i\in Z^{+}$$

Ta sẽ chứng minh rằng $M\to 0,\quad khi\ \ i\to\infty$.

Với $\varepsilon>0$ có $i_0(\varepsilon,\omega)$ sao cho $\forall\ i\ge i_0(\varepsilon,\omega)$

$$\log^{+}h(\theta^{-i}\omega)\le\varepsilon\,\mathrm{i},\ \left|\sum_{j=1}^{i}(\mathrm{k}(\theta^{-j}\omega)-\mathrm{K})\right|\le\varepsilon i$$

Cho a > 0 bất kỳ, chọn

$$0<\varepsilon<-\frac{1}{4}\max(-\frac{a}{2},\mathrm{K}).$$

Vì $\varepsilon^{-\frac{a}{2}.i}<\sum_{m=0}^{\infty}(\exp(\sum_{j=1}^{m}k(\theta^{-i-j}\omega))h(\theta^{-i-m}))\le\sum_{m=0}^{\infty}e^{-m\varepsilon}<\infty$, nên

$$\lim_{i\to\infty}e^{-a.i}<\sum_{m=0}^{\infty}(\exp(\sum_{j=1}^{m}k(\theta^{-i-j}\omega))h(\theta^{-i-m}))=0,\ i>i_0$$

$\sum_{m=0}^{\infty}(\exp(\sum_{j=1}^{m}k(\theta^{-i-j}\omega))h(\theta^{-i-m})$ là *tempered*

Từ đó $M\to 0,\quad khi\ \ i\to\infty$

Nên $\Phi(\mathrm{t},\theta^{-t}\omega,\mathrm{g}(\theta^{-t}\omega))$ là dãy *Cauchy,* giới hạn của nó được ký hiệu là $g^{*}(\omega)$ và $g^{*}\in H$

Do tính liên tục của Φ

$$\Phi(1,\omega,\mathrm{g}^*(\omega)) = \Phi(1,\omega,\lim_{x\to\infty}(\Phi(\mathrm{t},\theta^{-t},\mathrm{g}(\theta^{-t}\omega)))$$

$$= \lim_{x\to\infty}\Phi(\mathrm{t}+1,\theta^{-t-1}\theta\omega,\mathrm{g}^*(\theta^{-t-1}\theta\omega)) = \mathrm{g}^*(\theta\omega)$$

Vậy:

$$\Phi(1,\omega,\mathrm{g}^*(\omega)) = \mathrm{g}^*(\theta\omega)$$

và $\lim_{t\to\infty}\left\|\Phi(t,\omega,g(\omega)) - g^*(\theta^t\omega)\right\| = 0 \quad \forall g \in H$

Tính duy nhất của $g^*(\omega)$*:* Giả sử tồn tại hai điểm bất động $g_1^*, g_2^* \in H$. Từ (*) ta có $g_1^*(\omega) = g_2^*(\omega)$

Nên $g^*(\omega)$ là duy nhất.

Mệnh đề 4. [3] *Nếu tập hợp H các biến ngẫu nhiên tempered trong định lý 3 chứa một biến ngẫu nhiên hằng* $g(\omega) \equiv g$ *thì điểm bất động ngẫu nhiên*

$g^*: \Omega \to R^d$ *là đo được đối với quá khứ*

$F^- := \sigma\{\omega \mapsto \Phi(s,\theta^{-t}\omega) \,|\, 0 \le s \le t\}$.

2.4. Dáng điệu động lực của mô hình Solow ngẫu nhiên

Chúng ta sẽ chứng tỏ rằng động lực học của mô hình Solow ngẫu nhiên là xác định bởi một điểm bất động ngẫu nhiên ổn định duy nhất và hút toàn cục. Đặc biệt, nó đảm bảo rằng dáng điệu dài hạn của tất cả các quỹ đạo của cường độ tiền vốn là như nhau và được xác định bởi quỹ đạo của điểm bất động ngẫu nhiên này.

Định lý 5. *Giả thiết các quá trình ngẫu nhiên biểu diễn tốc độ của sự mất giá và phát triển dân số, và tích của tỷ lệ tiết kiệm và biến động trong sản xuất, tương ứng lấy giá trị*

$\delta(\omega) \in [\delta_{\min}, \delta_{\max}] \subset [0,1]$

$n(\omega) \in [\mathrm{n}_{\min}, \mathrm{n}_{\max}] \subset (-1,\infty)$

$\xi(\omega) \in [\xi_{\min}, \xi_{\max}] \subset (0,\infty)$ *với* $E\xi < \infty$

Giả thiết rằng f là không âm, tăng dần, lõm chặt và có đạo hàm liên tục.

Giả sử rằng

1. $\delta_{\max} + n_{\max} > 0$,
2. $0 \le \lim_{k\to\infty} f'(k) < \dfrac{\delta_{\max} + n_{\max}}{\xi_{\min}} < \lim_{k\to 0} f'(k) \le \infty$, *và*
3. $E\log\dfrac{1-\delta(\omega)+\xi(\omega)f'(k)}{1+n(\omega)} < 0$

Trong đó $\bar{k} := \bar{k}(\delta_{\max}, n_{max}, \xi_{\min})$ *là một trạng thái bất động không tầm thường của mô hình Solow tất định.*

Khi đó tồn tại một điểm bất động ngẫu nhiên dương duy nhất k^* của hệ động lực ngẫu nhiên Φ trong R_+ được sinh ra bởi mô hình tăng trưởng Solow ngẫu nhiên. Điểm k^* là ổn định, đo được đối với quá khứ và hút toàn cục trên R_{++}, tức là $\forall\, k > 0$ thì $\left\|\Phi(t,\omega,k) - k^*(\theta^t\omega)\right\| \to 0$ khi $t \to \infty$ hầu chắc chắn. Do đó dáng điệu dài hạn của tất cả các quỹ đạo là xác định duy nhất bởi điểm bất động ngẫu nhiên k^*.

Nếu $f(0) > 0$ thì không cần điều kiện đặt lên $\lim\limits_{k\to 0} f'(k)$ và k^* hút toàn cục trên R_+.

Chứng minh

Chứng minh này là một áp dụng của Định lý 3 về điểm bất động ngẫu nhiên. Đặt $G := [\bar{k}(\delta_{\max}, n_{\max}, \xi_{\min}), \infty)$. $G(\omega) \equiv G$ là một tập hợp ngẫu nhiên. Do tính đóng của G, $H \neq \phi$, $\bar{k} = \bar{k}(\delta_{\max}, n_{\max}, \xi_{\min})$, áp dụng Định lý 3 ta sẽ nhận được điểm bất động ngẫu nhiên không tầm thường k^*.

Tính bất biến của H: Ta kiểm tra điều kiện (1) của Định lý 3. Vì $h(\omega,k) \geq \bar{k}$ nên G là bất biến dương, $\bar{k} = \bar{k}(\delta_{\max}, n_{\max}, \xi_{\min})$ là điểm bất biến không tầm thường nhỏ nhất của tất cả các ánh xạ tất định $h(k)$.

$\Phi(1, \theta^{-1}\omega, g(\theta^{-1}\omega)) \in G$ với mọi $g \in G$.

Từ tính lõm của f ta suy ra: $f(k) \leq f(y) + f'(y)k$ với mọi k và $y > 0$ cố định tùy ý. Do đó

$$\Phi(1,\omega,k) \leq \frac{1 - \delta(\omega) + \xi(\omega) f'(y)}{1 + n(\omega)} k + \frac{\xi(\omega) f(y)}{1 + n_{\min}}.$$

Vì $E\xi < \infty$ nên ξ là *tempered*, suy ra: $\dfrac{1}{1+n(\omega)} \leq \dfrac{1}{1+n_{\min}}$.

Suy ra hàm $\Phi(1, \theta^{-1}\omega, g(\theta^{-1}\omega))$ là *tempered*

Tính chất 2) của Định lý 3: tính hút. Điều này được suy ra trực tiếp từ giả thiết 3) của Định lý 5 bởi vì f là giảm vì vậy nó nhận giá trị max tại phần tử nhỏ nhất của G,tức là $\sup\limits_{k\in G} f'(k) = f'(\bar{k})$

Tính chất 3) của Định lý 3. Cho $g \in G$ và giả sử $\Phi(t, \theta^{-1}\omega, g(\theta^{-1}\omega))$ là dãy Cosi với mọi ω, thì giới hạn là thuộc $G(\omega)$ với mọi ω, vì $G(\omega) \equiv G$ là bất biến dương và đóng.

Để chứng minh 3) ta chỉ cần kiểm tra được rằng $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t, \theta^{-t}\omega, g(\theta^{-t}\omega))$ là biến ngẫu nhiên *tempered.*

Đặt $x_{t+1} = a(\theta^t\omega)x_t + b(\theta^t\omega)$, với $a(\omega) := \dfrac{1 - \delta(\omega) + \xi(\omega f'(k))}{1 + n(\omega)}, b(\omega) := \dfrac{\xi(\omega f(\bar{k}))}{1 + n_{\min}}$.

Khi đó $\lim_{t\to\infty}\Phi(1,\theta^{-1}\omega,g(\theta^{-1}\omega))$ bị chặn trên bởi một điểm bất động ngẫu nhiên $x^*(\omega)$ là ổn định bởi giả thiết 3) và do đó hút bất kỳ biến ngẫu nhiên *tempered* nào.

Sự tồn tại của $x^*(\omega)$*:* Có duy nhất một điểm bất động ngẫu nhiên là

$$x^*(\omega):=b(\theta^{-1}\omega)+\sum_{i=1}^{\infty}b(\theta^{-(i+1)}\omega).\prod_{j=1}^{i}a(\theta^{-1}\omega)$$

Nhận xét rằng với mỗi $0<\varepsilon<-E\log a$, tồn tại $t(\varepsilon,\omega)$ để

$$\prod_{j=1}^{i}a(\theta^{-1}\omega)<e^{-\varepsilon i} \quad \text{với} \quad i\ge t(\varepsilon,\omega).$$

Do tính *tempered* của $b(\omega)$ (được suy ra từ $Eb<\infty$), ta nhận được sự tồn tại hầu chắc chắn của $x^*(\omega)$.

Tính *tempered* của $x^*(\omega)$: Ta có $E\log a<0$ và b là *tempered,* vì vậy với mọi $\varepsilon>0$ tồn tại $s_0(\omega,\varepsilon)$ sao cho $\forall\ s>s_0(\omega,\varepsilon)$ nên

$$\log b(\theta^{-s}\omega)\ \le\ \varepsilon s \quad \text{và} \quad \left|\sum_{j=1}^{s}(\log a(\theta^{-j}\omega)-E\log a)\right|\le\varepsilon s$$

Bởi vì $\mathrm{a}(\omega)>0$ và $\mathrm{b}(\omega)>0$ ta có biểu diễn sau

$$x^*(\theta^{-t}\omega)=\exp\log b(\theta^{-(t+1)}\omega)+$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\exp[\log b(\theta^{-(i+1+t)}\omega)+\sum_{j=1}^{t+1}(\log a(\theta^{-j}\omega)-E\log a)-\sum_{j=1}^{t}(\log a(\theta^{-j}\omega)-E\log a)+iE\log a]$$

Vì vậy, với $\varepsilon<\dfrac{|E\log a|}{2}$ và với mọi $t>s_0(\omega,s)$ ta có:

$$x^*(\theta^{-t}\omega)\le\exp\left(\varepsilon(t+1)\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\exp\left(\varepsilon((i+1+t)+(t+i)+iE\log a\right)$$

$$\le\exp\left(\varepsilon(t+1)+\exp\left(\varepsilon(3t+1)\frac{\exp\left(2\varepsilon+E\log a\right)}{1-\exp\left(2\varepsilon+E\log a\right)}\right.\right..$$

Do đó $x^*(\omega)$ tăng chậm hơn mọi hàm số mũ, và vì vậy nó là *tempered*.

Tính hút toàn bộ: Nếu mọi quá trình nhiễu là tầm thường thì $\bar{k}(\delta,n,\xi)$ là trạng thái bất động hút toàn cục trên R_{++}.

Tính chất đơn điệu sau đây được thỏa mãn:

$\Phi(1,\omega,k)\equiv h(\omega,k)\ge k$ với mọi $\omega\in\Omega$ và mọi $k\le\bar{k}:=\bar{k}(\delta_{\max},n_{\max},\xi_{\min})$

Với mỗi $k>0$ tồn tại $t(\omega,k)$,sao cho nếu $\delta(\theta^s\omega)\le\delta$ với mọi $0\le s\le t(\omega,k)$ thì $\Phi(t(\omega,x),\omega,k)>\bar{k}.$

Từ tính ergodic của θ ta suy ra

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t}1_{[0,\delta]}\delta(\theta^s\omega)=P\{\omega|\delta(\omega)\le\delta\}>0,$$

Và do đó ta nhận được

$P\{\omega|\delta(\omega)\le\delta$ với vô hạn $\delta\ge 0\}=1$. Vậy tồn tại đại lượng hữu hạn $T(\omega,k)$ với mọi $\omega,\ k$ và thỏa mãn yêu cầu nêu ở trên.

Tính duy nhất và F^{-} đo được

Từ tính hút toàn cục từ Mệnh đề 4 suy ra tính duy nhất của điểm bất động ngẫu nhiên trong R_{++}. Cũng từ Mệnh đề 4 ta có F^{-} đo được.

Ví dụ. Xét hàm $f(\mathrm{k})=(1+\mathrm{Ak}^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$ với $0\ne\alpha<1$, và A > 0.

Điều kiện (2) và (3) của Định lý 5 được thỏa mãn nếu

$$A<\min\{(\frac{\delta_{\max}+n_{\max}}{\xi_{\min}})^{\alpha},\frac{\xi_{\min}^{1-\alpha}}{E\xi}\frac{E\delta+n_{\min}}{(\delta_{\max}+n_{\max})^{1-\alpha}}\}$$

Ta có $\dfrac{f(\mathrm{k})}{k}=(A+\mathrm{k}^{-\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}\to A^{\frac{1}{\alpha}}$ khi $k\to\infty$

Điều kiện Inada (2) của Định lý 5 được suy ra bởi bất đẳng thức

$$A\le(\frac{\delta_{\max}+n_{\max}}{\xi_{\min}})^{\alpha}\qquad(*)$$

Từ đó $$\bar{k}=(\frac{1}{\frac{\alpha_{\max}+n_{\max}}{\xi_{\min}}-A})^{\frac{1}{\alpha}}$$

Và vì vậy $$f^{'}(\mathrm{k})=A(\frac{\delta_{\max}+n_{\max}}{\xi_{\min}})^{1-\alpha}$$

Trong đó $\bar{k}>0$ do (*)

Mặt khác ta có điều kiện hút (3) trong Định lý 5 viết lại như sau:

$$\mathrm{Elog}(1-\delta(\omega)+\xi(\omega)f'(\mathrm{k}))<\mathrm{Elog}(1+n(\omega))$$

Do hàm log là lõm (tính chất này suy ra Elog < logE do bất đẳng thức Jensen) ta thu được điều kiện đủ sau:

$$\mathrm{E}(1-\delta(\omega)+\xi(\omega)f'(\mathrm{k}))<\exp(\mathrm{Elog}(1+n(\omega)))$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$f^{'}(\bar{k}(\delta_{\max},n_{max},\xi_{\min}))<\frac{E\delta(\omega)-1+\exp(E\log(1+n(\omega)))}{E\xi(\omega)}\qquad(2.5)$$

Sử dụng $n(\omega)\ge n_{\min}$, (3.5) được suy ra từ bất đẳng thức sau

$$f^{'}(\bar{k}(\delta_{\max},n_{max},\xi_{\min}))<\frac{E\delta(\omega)+\mathrm{n}_{\min}}{E\xi(\omega)}\qquad(2.6)$$

Sử dung (3.6) ta có điều kiện (3) được thỏa mãn khi

$$0<A<\frac{\xi_{\min}^{1-\alpha}}{E\xi}\frac{E\delta+n_{\min}}{(\delta_{\max}+n_{\max})^{1-\alpha}}.$$

3. KẾT LUẬN

Bài báo tập trung nghiên cứu về mô hình tăng trưởng kinh tế Solow và sử dụng công cụ của lý thuyết hệ động lực ngẫu nhiên phân tích chi tiết mô hình tăng trưởng Solow với tham biến ngẫu nhiên. Bài báo đã làm sáng tỏ được rằng động lực học của mô hình Solow ngẫu nhiên được mô tả hoàn toàn bởi một điểm ngẫu nhiên hút toàn bộ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Hùng Thao (2000), *Tích phân ngẫu nhiên và phương trình vi phân ngẫu nhiên*, Nxb. Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

[2] Trần Thọ Đạt (2010), *Mô hình tăng trưởng kinh tế,* Nxb. Đại học Kinh tế Quốc dân, Hà Nội.

[3] B.Schmalfuss(1996), *A random fixed poin theorem Based on Lyapunov exponents,* Randdtaionom and Computational Dynamics, 4,257-268.

[4] B.Schmalfuss (1998), A random fixed poin theorem and the random graph transformation, *J.Math. App*. 225,91-113.

[5] Mirman, L.J. (1972), On the existence of steady measur for one sector growth models with uncertain technology, *International Economic Review,* 12, 271-286.

[6] Mirman, L.J(1973), The steady state behavior of a class of one sector growth models with uncertain technology, *Journal of Economic Theory* 6, 219-242.

THE SOLOW ECONOMIC GROWTH MODEL

Hoang Dieu Hong

ABSTRACT

In this paper, we use the theory of random dynamic system as a tool to analyze in detail the Solow economic growth model and study the simultaneous motions of orbits of evolution processes over time in the Solow economic growth model.

Keywords: *Non-linear function, interference, orbit, long-termed pattern of orbits.*

** Ngày nộp bài: 21/9/2020; Ngày gửi phản biện: 13/10/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020*

** Bài báo này là kết quả nghiên cứu từ đề tài cấp cơ sở mã số ĐT-2019-17 của Trường Đại học Hồng Đức.*