VÀNH VỚI CÁC ĐIỀU KIỆN CỦA LINH HÓA TỬ TRÁI MỊN

Hoàng Đình Hải[1], Vũ Thị Nhì[2], Nguyễn Thị Hương[3]

TÓM TẮT

Việc nghiên cứu các đặc trưng vành thông qua căn Jacobson gợi dẫn các nghiên cứu mới về linh hóa tử trái mịn và các ứng dụng của nó. Linh hóa tử trái mịn của một vành đã được W.K. Nicholson, Yiqiang Zhou trình bày trong [3]. Một Iđêan phải A của vành R được gọi là mịn nếu với mọi Iđêan phải B của R mà A + B = R thì B = R; A được gọi là linh hóa tử trái mịn nếu l(B) = 0 (l(B) là linh hóa tử trái của B). Mục đích của bài báo là nghiên cứu về linh hóa tử trái mịn mà W.K. Nicholson, Yiqiang Zhou đã đưa ra từ đó khai thác một số đặc trưng vành, chẳng hạn lớp vành Ikeda - Nakayama, lớp vành Artin, lớp vành π - chính quy mạnh với các điều kiện linh hóa tử trái mịn.

Từ khóa: *Iđêan phải mịn, linh hóa tử, căn Jacobson.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong bài báo, R là vành bên phải, kết hợp, có đơn vị $1 \neq 0$. Tập con I của vành R được gọi là Iđêan phải nếu $IR = I$, và gọi là Iđêan trái nếu $RI = I$. Nếu I vừa là Iđêan phải vừa là Iđêan trái thì gọi là Iđêan của vành R, khi đó ta viết $I \lhd R$. Ta nói Iđêan I là cốt yếu trong R và kí hiệu là $I \lhd^* R$ nếu I có giao khác không với mọi Iđêan khác không của R. Chúng ta kí hiệu căn Jacobson của R là $J(R) = J$; và S_r , S_l, Z_r, Z_l lần lượt kí hiệu cho đế bên phải, đế bên trái, Iđêan kì dị phải, Iđêan kì dị trái của R. Linh hóa tử trái của Iđêan I là $l(I) = \{r \in R | \, rx = 0, \ \forall x \in I\}$. Ta nhắc lại rằng một Iđêan phải A của vành R được gọi là *mịn* nếu với mọi Iđêan phải B của R mà $A + B = R$ thì $B = R$ và ta kí hiệu là $A \lhd^0 R$. Phần tử $r \in R$ được gọi là lũy linh (tựa lũy linh) nếu tồn tại $n \in N$ sao cho $r^n = 0$ ($r^n = r^{n+i}, \forall i \geq 0$). R là vành π- chính quy mạnh nếu với mọi $r \in R$ dây chuyền $rR \supseteq r^2R \supseteq r^3R \supseteq \cdots$ đều dừng, điều này tương đương với dây chuyền $Rr \supseteq Rr^2 \supseteq Rr^3 \supseteq \cdots$ đều dừng, kéo theo mọi vành hoàn chỉnh bên trái hay bên phải đều là vành π −chính quy mạnh.

2. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

2.1. Linh hóa tử và linh hóa tử trái mịn

Định nghĩa 1. Cho R là một vành, M là một R - môđun trái, S là một tập con nào đó của M. Linh hóa tử của S trong R được định nghĩa là tập hợp

$$Ann_R(S) = \{r \in R \mid rx = 0, \text{ với mọi } x \in S\}$$

[1] *Trung tâm Giáo dục Quốc tế, Trường Đại học Hồng Đức*

[2] *Học viên cao học lớp Đại số và Lý thuyết số K11, khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

Bổ đề 1. Linh hóa tử của S trong R là một Iđêan của R.

Chứng minh: Thật vậy,

Với mọi $r, s \in Ann_R(S)$ và $x \in S, (r + s)x = rx + sx0$. Do đó $r + s \in Ann_R(S)$.

Với mọi $r \in R, s \in Ann_R(S), x \in S, (rs)x = r(sx) = r.0 = 0$.

Điều đó chứng tỏ $rs \in Ann_R(S)$.

Với mọi $r \in R, s \in Ann_R(S), x \in S, (sr)x = s(rx) = 0$. Chứng tỏ $sr \in Ann_R(S)$.

Vậy $Ann_R(S)$ là một Iđêan của R.

Bổ đề 2. Cho R là một miền nguyên và M là một R - môđun xoắn trái hữu hạn sinh. Khi đó môđun M có một linh hóa tử khác không.

Chứng minh: Theo giả thiết M là một R - môđun hữu hạn sinh nên tồn tại tập sinh hữu hạn $A := \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset M$ sao cho $M = RA$. Do M là một R - môđun xoắn trái nên với mỗi $a_i \in A \subset M$, tồn tại phần tử khác không $r_i \in$ R sao cho $r_i a_i$=0. Chúng ta sẽ chứng minh phần tử khác không $r \in$ R với $r := r_1 r_2 \dots . r_n$ thỏa mãn $rx = 0$ với mọi $x \in$ M. Với mỗi $x \in$ M, $x = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \cdots + s_n a_n, a_i \in A, s_i \in R$. Do R là một miền nguyên, và $r_i a_i$=0, ta có:

$$rx = r_1 r_2 \dots . r_n (s_1 a_1 + s_2 a_2 + \cdots + s_n a_n)$$
$$= r_2 \dots . r_n s_1 (r_1 a_1) + r_1 r_3 \dots . r_n s_2 \big(r_2 a_{2)}\big) + \cdots + r_1 r_2 \dots . s_n (r_n a_n) = 0.$$

Nhận xét 1. Bổ đề 2 không còn đúng khi bỏ đi giả thiết hữu hạn sinh đối với mô đun M.

Chứng minh: Ta có $R = \mathbb{Z} -$ vành các số nguyên, là một miền nguyên. Xét $\mathbb{Z}$ - môđun $M = \oplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}$. Với mỗi $a \in M$,

$a = (a_1 + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, a_2 + \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}, \dots, a_k + \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}, 0, 0, \dots)$, trong đó $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$.

Điều đó suy ra $2^k a = 0$ và do đó M là R - môđun xoắn trái.

Bây giờ giả sử rằng $r \in Ann_R(M)$. Chọn số nguyên k sao cho $r < 2^k$. Xét phần tử $a = (0,0, \dots, 1 + \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}, 0, 0, \dots)$ trong M, có duy nhất thành phần thứ k khác 0. $r \in Ann_R(M)$ nên $ra = (0,0, \dots, r + \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}, 0, 0, \dots) = 0$ do $r < 2^k$. Do đó đòi hỏi $r = 0$. Vậy $Ann_R(M) = 0$.

Định nghĩa 2. Cho vành R với đơn vị 1. Một phần tử m của R - môđun M được gọi là phần tử xoắn nếu $rm = 0$ với $r \neq 0$ nào đó thuộc R. Tập hợp các phần tử xoắn của M kí hiệu là $Tor(M) = \{m \in M \mid rm = 0, \text{với } 0 \neq r \text{ nào đó của } R\}$.

Nhận xét 2. Cho vành R với đơn vị 1 và R - môđun M, I là một Iđêan của R. Gọi M' là tập con các phần tử a của M sao cho chúng bị triệt tiêu bởi lũy thừa I^k nào đó của I, bậc lũy thừa k tùy thuộc phần tử a. Khi đó M' là một môđun con của M.

Chứng minh: Thật vậy, đặt $N_i := \{m \in M \mid sm = 0, \text{với mọi } s \in I^i\}$, N_i chứa các phần tử của M bị triệt tiêu bởi lũy thừa I^i.

Ta có các nhận định sau:

1) Mỗi tập con N_i là một môđun con của M
2) Ta có dây chuyền tăng $N_1 \subset N_2 \subset \cdots$, và
3) $M' = \cup_{i=1}^{\infty} N_i$

Ta lần lượt chứng minh cho từng nhận định trên.

1) Cho $a, b \in N_i$ và $r \in R$. Với mọi $s \in I^i$, ta có $s(a+b) = sa + sb = 0$ bởi vì $a, b \in N$ bị triệt tiêu bởi lũy thừa I^i. Hơn nữa $sra = (sr)a = 0$ do $sr \in I^i$ bởi I^i là một Iđêan. Vì thế, mỗi tập con N_i là một môđun con của M.

2) Ta để ý rằng $I^{i+1} = I^i \times I \subset I^i$. Do đó $N_i \subset N_{i+1}$ với mọi i, nghĩa là có dây chuyền tăng $N_1 \subset N_2 \subset \cdots$,

3) Do hợp các môđun con thuộc dây chuyền tăng của M là một môđun con của M. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Định nghĩa 3. Một Iđêan phải A của vành R được gọi là một linh hóa tử trái mịn của vành R nếu với mọi Iđêan phải B của R mà $A + B = R$ thì $l(B) = 0$ và ta kí hiệu $A \lhd^{las} R$.

Bằng cách tương tự, ta nói một Iđêan phải A là một *linh hóa tử phải mịn* của vành R nếu trong định nghĩa trên $l(B) = 0$ được thay bằng $r(B) = \{r \in R | \, xr = 0, \forall x \in I\} = 0$ và kí hiệu là $A \lhd^{ras} R$.

Nếu Iđêan A vừa là linh hóa tử trái mịn vừa là linh hóa tử phải mịn của R thì ta nói A là linh hóa tử mịn của R, kí hiệu $A \lhd^{as} R$.

Nhận xét 3. Mỗi Iđêan phải mịn là linh hóa tử trái mịn

Chứng minh: Giả sử, Iđêan phải A của vành R là mịn thì với mọi Iđêan phải B của R mà $A + B = R$ ta có $B = R$. Do $l(R) = 0$ nên A là linh hóa tử trái mịn của R.

Ví dụ 1. Trong vành số nguyên $\mathbb{Z}$, với mọi $m \in \mathbb{Z}$, $m\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2. Trong vành thương $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_m$, mọi Iđêan của $\mathbb{Z}_m$đều có dạng $\mathbb{Z}_n$ với $n \backslash m$.

Ví dụ 3. Trong vành số nguyên $\mathbb{Z}$, thì $2\mathbb{Z} \lhd^0 \mathbb{Z}$.

Thật vậy , giả sử $I \lhd \mathbb{Z}$ và $2\mathbb{Z} + I = \mathbb{Z}$. Do $1 \notin 2\mathbb{Z}$ nên $1 \in I$. Nhưng do $I \lhd \mathbb{Z}$ nên $I = \mathbb{Z}$, vậy $2\mathbb{Z} \lhd^0 \mathbb{Z}$.

Nhận xét 4. Điều ngược lại của nhận xét 3 là không đúng.

Chứng minh: Thật vậy, ta xét phản ví dụ sau:

Ví dụ 4. Cho vành $R = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ trong đó F là một trường. Iđêan $K = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ là linh hóa tử trái mịn nhưng không là Iđêan mịn của R. Thật vậy, giả sử $K + I = R$. I phải chứa Iđêan $N = \begin{bmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ có linh hóa tử trái $l(N) = 0$ do đó $l(I) = 0$. Vậy Iđêan $K = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ là linh hóa tử trái mịn. Tuy nhiên từ đẳng thức $K + N = R$, trong khi $N \neq R$, chứng tỏ K không là Iđêan mịn của R.

Ví dụ 5. Vành R là Iđêan phải của chính nó, nhưng không là linh hóa tử trái mịn.

Thật vậy, $R + 0 = R$ trong khi $l(0) = R$ chứng tỏ R không là linh hóa tử trái mịn.

Ví dụ 6. Khi R là một miền nguyên thì R không có ước của 0, do đó mọi Iđêan phải của R đều là linh hóa tử trái mịn.

Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là tổng của hai linh hóa tử trái mịn có là linh hóa tử trái mịn không?

Trước khi tìm câu trả lời cho câu hỏi này, chúng ta xem xét mệnh đề sau:

Mệnh đề 1. Cho A, B là các Iđêan phải của vành R sao cho $A \lhd^0 R, B \lhd^{las} R$. Thế thì $A + B = B + A \lhd^{las} R$.

Chứng minh

Thật vậy, $A \lhd^0 R$ nên $(A + B) + X = R$ thì $B + X = R$. Do $B \lhd^{las} R$ nên $l(X) = 0$. Đẳng thức này chứng tỏ $A + B = B + A \lhd^{las} R$.

Do $l(R) = 0$ nên mọi Iđêan phải mịn của R đều là linh hóa tử trái mịn. Từ đó Mệnh đề 1 như là một trường hợp riêng của giả thiết: "tổng của hai linh hóa tử trái mịn là linh hóa tử trái mịn".

Ta biết rằng căn Jacobson $J(R) = J$ của R là tổng của các Iđêan phải mịn của vành R, nên Nhận xét 3 chúng ta có kết quả sau:

Mệnh đề 2. Căn Jacobson $J(R) = J$ của vành R là một linh hóa tử trái mịn.

Ví dụ 7. Xét $Z_l = Z_l(R) = \{z \in R | l(z) \lhd^* R\}$. Ta dễ thấy rằng $Z_l(R)$ là linh hóa tử trái mịn của R và còn được gọi là Iđêan trái kì dị của R.

Mệnh đề 3 [3, Proposition 2]. Cho K là một linh hóa tử trái mịn của vành R, khi đó: $K + J + Z_l \lhd^{las} R$.

Chứng minh

Giả sử $K + J + Z_l + X = R$. Do J mịn nên $K + Z_l + X = R$. Tồn tại $k \in K, z \in Z_l, x \in X$ sao cho $k + z + x = 1$. Do $K \lhd^{las} R$ nên $l(Z_l + X) = 0$. Điều này dẫn đến $0 = l(zR + X) = l(z) \cap l(X)$. Do $z \in Z_l$ là phần tử kì dị trái của R nên $l(z)$ cốt yếu trong R. Vì thế đẳng thức $l(z) \cap l(X) = 0$ kéo theo $l(X) = 0$, chứng tỏ $K + J + Z_l \lhd^{las} R$.

Mệnh đề 4. Nếu linh hóa tử trái của Iđêan phải T là cốt yếu trong R thì $rl(T) \lhd^{las} R$.

Chứng minh

Giả sử $rl(T) + X = R$ trong đó X là Iđêan phải nào đó của R. Ta có $0 = l(rl(T)) \cap l(X) = l(T) \cap l(X)$. Do $l(T)$ cốt yếu trong R nên $l(X) = 0$ chứng tỏ $rl(T) \lhd^{las} R$.

Nhận xét 5. Dễ dàng thấy rằng linh hóa tử trái mịn có tính chất di truyền, nghĩa là nếu A$\lhd B$ và $B \lhd^{las} R$ thì $A \lhd^{las} R$.

Từ Mệnh đề 4 và Nhận xét 3 ta có:

Hệ quả 1. Nếu $l(T)$ cốt yếu trong R thì Iđêan phải T sẽ là linh hóa tử trái mịn của vành R.

Tìm hiểu chiều ngược lại của Mệnh đề 4 ta thấy rằng, nếu $rl(T) \lhd^{las} R$ và $r(l(T) \cap R_b) = r(l(T)) + r(b)$ với mọi Iđêan phải T của R, $b \in R$ thì $l(T) \lhd^* R$. Thật vậy, với mọi $0 \neq b \in R$ mà $l(T) \cap R_b = 0$ thì $r(l(T)) + r(b) = R$. Do $rl(T) \lhd^{las} R$ nên $l(r(b)) = 0$. Lại có $R_b \ll l(r(b))$, do đó $b = 0$. Mâu thuẫn này chứng tỏ $l(T) \cap R_b \neq 0$ hay $l(T) \lhd^* R$.

Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là tìm đặc trưng của linh hóa tử trái mịn kR, ta có các điều kiện tương đương sau đã được trình bày trong [3].

Mệnh đề 5: Cho $k \in R$ thì $kR \lhd^{las} R$ khi và chỉ khi một trong các điều kiện sau xảy ra:

1) Với mọi $0 \neq b \in R$ thì $bkR \subset bR$.

2) Với mọi $r \in R$ ta có $l(1-kr) = 0$.

3) Với mọi $r \in R$ ta có $l(1-rk) = 0$.

4) Với mọi $r \in R$ ta có $l(k-krk) = l(k)$.

Chứng minh: Chúng ta chứng minh theo lược đồ sau:

$kR \lhd^{las} R \Longrightarrow 1) \Longrightarrow 2) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 4) \Longrightarrow kR \lhd^{las} R$.

$kR \lhd^{las} R \Longrightarrow 1)$

Với $0 \neq b \in R$ ta có $b \notin bkR$. Thật vậy, nếu $b \in bkR$ thì $b = bkr, r \in R$.

Điều đó suy ra $b(1-kr) = 0$, hay $b \in l(1-kr)$.

Do $kR \lhd^{las} R$ và $kR + (1-kr)R = R$ nên $l(1-kr) = 0$.

Do đó $b = 0$. Vậy $0 \neq b \in R$ thì $b \notin bkR$ và do đó $bkR \subset bR$.

$1) \Longrightarrow 2)$

Thật vậy, lấy bất kì $b \in l(1-kr)$ với mọi $r \in R$.

Thế thì $b(1-kr) = 0$ hay $b = bkr \in bkR$ với mọi $r \in R$.

Do 1) $b = bkr \in bkR$ chỉ xảy ra khi $b = 0$.

$2) \Longrightarrow 3)$

Với mọi $r \in R$ lấy bất kì $b \in l(1-rk)$. Thế thì, $b(1-rk) = 0$.

Ta có $b = brk \Longrightarrow br(1-kr) = b(r-rkr) = b(1-rk)r = 0$.

Do 2) ta có $br = 0$ và do đó $b = brk = 0$.

Điều này chứng tỏ $l(1-rl) = 0, \forall r \in R$.

$3) \Longrightarrow 4)$

Nếu $b(k-krk) = 0$ thì $bk(1-rk) = 0$.

Do 3) ta có $bk = 0 \Longrightarrow b \in l(k)$.

$4) \Longrightarrow kR \lhd^{las} R$

Giả sử X là Iđêan phải sao cho $kR + X = R$.

Ta có $1 = kr + x, r \in R, x \in X$. Nếu $b \in l(X)$ thì $bx = 0$.

Điều này kéo theo $b = bkr \Longrightarrow b(k-krk) = b(1-kr)k = bxk = 0$.

Do 4), ta có $b \in l(k), bk = 0 \Longrightarrow b = 0$. Như vậy $l(X) = 0$.

2.2. Vành với điều kiện linh hóa tử trái mịn

Bổ đề 3. Với mọi $r, k \in R$, ta có các mệnh đề sau

1) $l(k) \oplus l(1-kr) = l(k-krk)$.

2) $l(1-kr) \cong l(1-rk)$.

Chứng minh

1) Với mọi $b \in l(k) \Longrightarrow bk = 0 \Longrightarrow bk - bkrk = 0$

$\Longrightarrow b(k - krk) = 0 \Longrightarrow b \in l(k - krk)$

Còn nếu $b \in l(1 - kr) \Longrightarrow b(1 - kr) = 0$, do đó

$b - bkr = 0 \Longrightarrow bk - bkrk = 0 \Longrightarrow b(k - krk) = 0 \Longrightarrow b \in l(k - krk)$.

Vì thế, nếu $b \in l(k) \oplus l(1 - kr)$ thì $b \in l(k - krk)$.

Ngược lại, với bất kì $b \in l(k - krk)$, nếu $bk = 0$ thì $b \in l(k)$.

Nếu $bk \neq 0$, thì từ $b(k - krk) = 0$ ta có $b(1 - kr)k = 0$.

Điều này xảy ra với mọi $k \in R$ nên $b(1 - kr) = 0$.

Có nghĩa là $b \in l(1 - kr)$. Như vậy, nếu $b \in l(k - krk)$ thì $b \in l(k) \oplus l(1 - kr)$.

2) Ta có $l(k - krk) = l\big(k(1 - rk)\big) = l(k) \oplus l(1 - rk) = l(1 - kr)k) =$

$= l(1 - kr) \oplus l(k) \cong l(k) \oplus l(1 - kr)$.

Suy ra điều phải chứng minh.

Định nghĩa 4. Phần tử $r \in R$ được gọi là *mịn phải (trái)* nếu Iđêan rR (tương ứng Rr) là linh hóa tử trái mịn. Phần tử vừa mịn phải vừa mịn trái thì gọi là *phần tử mịn*.

Nhận xét 6. Phần tử khả nghịch thì không mịn.

Chứng minh

Thật vậy, giả sử $r \in R$ là khả nghịch phải. Tồn tại $r' \in R$ sao cho $rr' = 1$. Do đó $1 - rr' = 0$, nên $l(1 - rr') = R$. Từ đó suy ra, rR không là linh hóa tử trái mịn.

Nhận xét 7. Nếu R là miền nguyên thì phần tử $r \in R$ là mịn phải nếu và chỉ nếu $rR \neq R$ (còn có nghĩa là r không khả nghịch phải).

Chứng minh

Thật vậy, nếu phần tử $r \in R$ là mịn phải thì $rR \lhd^{las} R$.

Điều này chứng tỏ với mọi $r' \in R$ ta có $l(1 - rr') = 0$.

Suy ra, $1 - rr' \neq 0 \Longrightarrow rr' \neq 1 \Longrightarrow rR \neq R$.

Ngược lại, nếu $rR \neq R$ thì $rr' \neq 1$ với mọi $r' \in R$.

Điều này chứng tỏ $1 - rr' \neq 0$ với mọi $r' \in R$.

Do R là miền nguyên nên $l(1 - rr') = 0$ với mọi $r' \in R$.

Như vậy $rR \lhd^{las} R$ hay phần tử $r \in R$ là mịn phải.

Mệnh đề 6. Cho R là vành Artin, k là phần tử mịn phải sao cho:

Với mọi $0 \neq b \in R$ mà $bR \supset bkR$ thì k là tựa lũy linh.

Chứng minh

Thật vậy, giả sử k không tựa lũy linh ta sẽ chứng minh dây chuyền

$kR \supset k^2R \supset k^3R \supset \cdots$ là giảm thực sự.

Do k không tựa lũy linh nên không tồn tại $n \in N$ sao cho $k^n = k^{n+i}, \forall i \geq 1$.

Do $bR \supset bkR$ với mọi $0 \neq b \in R$ nên $R \supset kR$.

Giả sử bất đẳng thức $k^iR \supset k^{i+1}R$ đúng với $i = n$, nghĩa là $k^nR \supset k^{n+1}R$.

Ta chứng tỏ $k^{n+1}R \supset k^{n+2}R$. Do k không tựa lũy linh nên $k^{n+1} \neq 0$.

Bất đẳng thức $bR \supset bkR$ đúng với $= k^{n+1} \neq 0$.

Điều này dẫn đến$k^{n+1}R \supset k^{n+2}R$.

Bằng qui nạp chúng ta nhận được dây chuyền giảm thực sự $kR \supset k^2R \supset k^3R \supset \cdots$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết R là vành Artin.

Giả thiết phản chứng sai chứng tỏ k là tựa lũy linh.

Từ Mệnh đề 6, chúng ta thấy rằng nếu R là vành có phần tử k mịn phải không tựa lũy linh thỏa mãn bất đẳng thức $bR \supset bkR$ với mọi $0 \neq b \in R$ thì R không phải là vành Artin. Đồng nghĩa với R không có Iđêan tối tiểu.

Gọi tập hợp các phần tử mịn trái của vành R là $K_l = \{r \in R | rR \lhd^{las} R\}$.

Ta có mối quan hệ với Iđêan trái kì dị $Z_l = Z_l(R) = \{z \in R | l(z) \lhd^{*} R\}$ và căn Jacobson J như sau: $Z_l \subseteq K_l$ và $J \subseteq l$

Một điểm lưu ý là K_l không đóng đối với phép toán cộng. Ví dụ trong $R = \mathbb{Z}$, -2 và 3 thuộc K_r trong khi $1 \notin K_l$.

Ngoài ra K_l bị chứa trong tập hợp các phần tử không khả nghịch (Nhận xét 4). Như là hệ quả của Mệnh đề 5, ta có:

Hệ quả 2. Nếu $r \in K_l$ thì $rR \subseteq K_l$ và $Rr \subseteq K_l$.

Từ hệ quả này ta nói l là *nửa Iđêan* của R. Trong trường hợp tổng quát thì nửa Iđêan không khép kín với phép toán cộng và đó là lí do nó được gọi là nửa Iđêan. Trường hợp nửa Iđêan khép kín với phép toán cộng thì nó trở thành Iđêan.

Hệ quả 3. 0 là phần tử lũy đẳng duy nhất của K_l.

Chứng minh

Thật vậy, nếu k là phần tử lũy đẳng của K_l và $k \neq 0$ thì theo Mệnh đề 6,

dây chuyền $kR \supset k^2R \supset k^3R \supset \cdots$ là giảm thực sự.

Điều này mâu thuẫn với $k = k^2$,

chứng tỏ 0 là phần tử lũy đẳng duy nhất của K_l

Mệnh đề 7. Các điều kiện sau đây là tương đương đối với Iđêan I của vành R:

1, $I \lhd^{las} R$

2, $I \subseteq K_l$

3, $l(1-k) = 0, \forall k \in \mathrm{I}$

Chứng minh: $(1 \Longrightarrow 2)$ Khi $I \lhd^{las} R$ thì mọi phần tử của I là phần tử của K_l.

$(2 \Longrightarrow 3)$, $\forall k \in \mathrm{I} \Longrightarrow k \in K_r$. Do đó $l(1-kr) = 0, \forall r \in R$. Ta có $l(1-k) = 0$.

$(3 \Longrightarrow 1)$. $\forall k \in \mathrm{I}$ thì $l(1-k) = 0$

Giả sử $I + X = R$, ta có $1 = k + x$ với $k \in \mathrm{I}$, $x \in X$. Ta có $l(x) = l(1-k) = 0$. Điều này chứng tỏ $l(X) = 0$ hay $I \lhd^{las} R$.

Mệnh đề 8. Trong vành $\pi-$chính qui mạnh R thì $K_l = J$ là lũy linh.

Chứng minh: Từ Mệnh đề 7, dễ dàng suy ra $J \subseteq K_l$.

Giả sử $r \in K_l$ không lũy linh. $r^n \neq 0$ với mọi n . Áp dụng Mệnh đề 6, chúng ta có $r^nR \supset r^{n+1}R$. Bởi vậy $rR \supset r^2R \supset \cdots$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Do vậy, mọi phần tử của K_l là lũy linh. Từ Hệ quả 2, ta có rr' là lũy linh với mọi $r' \in R$ và do đó $K_l = J$.

Ta định nghĩa *AS Iđêan trái* của vành R là tổng các linh hóa tử trái mịn của vành R_R và kí hiệu là $A_l = A_l(R) = \sum\{K | K \lhd^{las} R\}$. Tương tự *AS Iđêan phải* của vành R là tổng các linh hóa tử phải mịn của vành R và kí hiệu là $A_r = A_r(R) = \sum\{K | K \lhd^{ras} R\}$.

Rõ ràng rằng với mọi vành R thì $K_l \subseteq A_l$, nhưng điều ngược lại thì không đúng, chẳng hạn $R = \mathbb{Z}$.

Định lý 1. Trong vành R chúng ta có:

1, A_l là một Iđêan hai phía chứa mọi linh hóa tử mịn trái.

2, $A_l = \{k_1 + k_2 + \cdots. + k_n | k_i \in K_l, \forall i, n \geq 1\}$.

3, $A_l = K_l R = R K_l$.

4, $J \subseteq A_l$ và $Z_l \subseteq A_l$.

Chứng minh

2, Đặt $X = \{k_1 + k_2 + \cdots + k_n | k_i \in K_l, \forall i, n \geq 1\}$. Ta chứng minh $A_l = X$.

Lấy $x \in A_l$, $x \in K_1 + K_2 + \cdots + K_n$ với $K_i \lhd^{las} R, i = 1,2, \ldots, n$.

Ta có $x = k_1 + k_2 + \cdots + k_n,\ k_i \in K_i, \forall i = 1,2, \ldots, n$.

Hơn nữa $k_i R \subseteq K_i$. Bởi vậy , $k_i R \lhd^{las} R$.

Điều này chứng tỏ $k_i \in K_l$, suy ra rằng $A_l \subseteq X$.

Ngược lại, lấy $k \in K_l$ thì ta có $kR \lhd^{las} R$.

Bởi thế $k \in A_l$. Điều đó suy ra $X \subseteq A_l$.

1, Rõ ràng A_l là một Iđêan phải. Ngoài ra do 2, đã được chứng minh ở trên và hệ quả 2, nó là một Iđêan trái.

3, Suy ra từ 1,2 và bất đẳng thức $K_l \subseteq A_l$.

4, Điều này suy ra từ Bổ đề 3.

Để lột tả rõ hơn quan hệ giữa A_r và A_l chúng ta có nhận xét sau đây:

Nhận xét 8.

1, Có thể xảy ra các quan hệ $A_r \nsubseteq A_l$ hay $A_l \nsubseteq A_r$.

2, $A_l(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ và do đó Iđêan phải A_l có thể không mịn.

3, Tổng của hai Iđêan mịn có thể không mịn.

Mệnh đề 9. Cho R là vành Ikeda-Nakayama.

Nếu $rl(T) \lhd^{las} R$ thì $l(T) \lhd^* R$ với mọi $T \lhd R$.

Chứng minh

Gọi K ⊲ R sao cho $\cap\, l(T) = 0$. Do R là vành Ikeda-Nakayama nên ta có $R = r\big(K \cap l(T)\big) = r(K) + rl(T)$.

Từ giả thiết $rl(T) \lhd^{las} R$ ta có $l\big(r(K)\big) = 0$.

Điều này chứng tỏ $K = 0$, nghĩa là $l(T) \lhd^* R$.

Bài toán: Tính A_r và A_l trong vành R

Dĩ nhiên ứng với mỗi đặc trưng của R cho ta các hướng tính toán A_r và A_l khác nhau. Do đó cấu trúc của A_r và A_l sẽ giúp ta nhìn nhận, phân loại vành theo cách riêng của nó.

Ở đây, chúng ta tính toán trong một số trường hợp cụ thể, độc giả từ đó có một cách nhìn của riêng mình.

Trường hợp 1: Vành $R = \mathbb{Z}$.

Trước hết, $\mathbb{Z}$ là vành giao hoán nên ta có nhận xét $A_r(\mathbb{Z}) = A_l(\mathbb{Z})$.

Mọi Iđêan I của vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ đều có dạng $m\mathbb{Z}$. Giả sử $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ và $l(n\mathbb{Z}) = 0$.

Tức là $l(n\mathbb{Z}) = \{z \in \mathbb{Z} | \text{zn}\mathbb{Z} = 0\}$. Dễ dàng thấy rằng $\{z \in \mathbb{Z} | zn\mathbb{Z} = 0\}$ xảy ra khi và chỉ khi $z = 0$. Nghĩa là $l(n\mathbb{Z}) = 0$, đồng nghĩa với $m\mathbb{Z} \lhd^{las} \mathbb{Z}$ với mọi m. Suy ra $A_l(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Trường hợp 2: Vành $\mathrm{R} = \mathbb{Z}_2$.

$\mathbb{Z}_2$ chỉ có hai Iđêan là $\bar{0} = 2n\mathbb{Z}$ và $\bar{1} = (2n+1)\mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$.

Dễ dàng thấy rằng $l(\bar{0}) = \mathbb{Z}_2$. Ngoài ra $l(\bar{1}) = \bar{0}$.

Chỉ có các phân tích thành tổng các Iđêan con $\mathbb{Z}_2 = \bar{0} + \bar{1} = \bar{1} + \bar{0}$, do đó suy ra $A_r(\mathbb{Z}_2) = 0$. Do tính chất giao hoán của $\mathbb{Z}_2$ta có $A_r(\mathbb{Z}_2) = 0 = A_l(\mathbb{Z}_2)$.

Trường hợp3. Vành $\mathrm{R} = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$

Ta có $\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Có các dạng Iđêan $\begin{bmatrix} I_\mathbb{Z} & I_{\mathbb{Z}_2} \\ 0 & I_{\mathbb{Z}_2} \end{bmatrix}$ trong đó $I_\mathbb{Z}$ là Iđêan của $\mathbb{Z}$, $I_{\mathbb{Z}_2}$ là Iđêan của $\mathbb{Z}_2$

Xét các đẳng thức ma trận sau:

$\begin{bmatrix} \mathrm{z} & \bar{\imath} \\ 0 & \bar{\jmath} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{z} \times \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

và $\begin{bmatrix} \mathrm{z} & \bar{\imath} \\ 0 & \bar{\jmath} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z \times \mathbb{Z}_2 + \bar{\imath} \times \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \bar{\jmath} \times \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$.

Nên ta có $l\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}\right) = 0$ và $l\left(\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$. Nên $\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subset A_l(\mathrm{R})$.

$\begin{bmatrix} \mathrm{z} & \bar{\imath} \\ 0 & \bar{\jmath} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{z} \times \mathbb{Z} & \bar{\imath} \times \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \bar{\jmath} \times \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \mathrm{z} & \bar{\imath} \\ 0 & \bar{\jmath} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z \times \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Nên ta cũng có $l\left(\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}\right) = 0$ và $l\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{bmatrix}$.

Nên $\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subset A_l(\mathrm{R})$.

Từ đó suy ra rằng $A_l(R) = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. KẾT LUẬN

Các kết quả nghiên cứu linh hóa tử trái mịn của một vành trong bài báo này bước đầu cho ta một vài phân loại vành. Một số tính chất liên quan đến giải xoắn $Tor(R)$ của R với tư cách là một môđun trên chính nó sẽ là hướng nghiên cứu tiếp theo mà các tác giả chưa có điều kiện để đề cập tới trong bài báo này. Một số chứng minh trong bài báo là làm rõ hơn các nội dung đã được các tác giả W.K. Nicholson, Yiqiang Zhou trình bày cô đọng trong [3] nhằm giúp thêm tư liệu cho người đọc.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] W.K. Nicholson, Yiqiang Zhou (2011), *Annihilator-small Right Ideals*, Algebra Colloquium 18(Special 1):785-800.

[2] D. Anderson and V.P. Camillo (1998), *Armendariz rings and Gaussian rings*, Comm. in Algebra 26, 2265-2272.

[3] V. P. Camillo, W.K. Nicholson and M.F. Yousif (2000), *Ikeda-Nakayama rings*, J. Algebra 226, 1001-1010.

[4] K.R. Goodearl (1976), *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules*, CRC Press.

[5] N.V Sanh, N.A Vu, S Asawasamrit, K.F.U Ahmed and L.P Thao (2010), *Primeness in module category*, Asian-European J. Mathematics, 3 (1), 145-154.

[6] Thuat V.D, Hai D.H, N.D.H Nghiem (2016), Sarapee C, *On the endomorphism rings of Max CS and Min CS Modules*, AIP Conference Proceedings 1775, 030066; doi:10.1063/1.4965186.

RING WITH LEFT SMALL ANNIHILATOR CONDITIONS

Hoang Dinh Hai, Vu Thi Nhi, Nguyen Thi Huong

ABSTRACT

The study of Ring characteristics through Jacobson radical suggests new studies on the small annihilator ideals and its applications. Left small annihilator ideals of a ring has been W.K. Nicholson, Yiqiang Zhou presented in [3]. A right ideal A of the ring R is called a small ideal if for every right ideal B of R that A + B = R then B = R; A is called a left small annihilator ideals if l (B) = 0 (l (B) is a left annihilator of B). The purpose of this paper is to study the left small annihilator ideals that W.K. Nicholson and Yiqiang Zhou have contributed. Since then we would like to develop a number of ring characteristics, such as the Ikeda-Nakayama ring, the Artin ring, and the strong π-regular ring with small annihilator conditions.

Keywords: *Small right Ideal, annihilator, jacobson radical.*

** Ngày nộp bài: 28/8/2020; Ngày gửi phản biện: 23/9/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020*