KHÔI PHỤC VÀ XẤP XỈ HÀM SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH TRONG KHÔNG GIAN BESOV

Nguyễn Mạnh Cường[1], Bùi Khắc Thiện[2]

TÓM TẮT

Chúng tôi nghiên cứu khôi phục và xấp xỉ lớp hàm số không tuần hoàn thuộc không gian Besov $B^{\Omega}_{p,\theta}$ có độ trơn đẳng hướng bằng phương tuyến tính không thích nghi. Xây dựng được phương pháp tuyến tính $L_n(X_n, \Phi_n, f)$ dựa trên giá trị lấy mẫu mà cụ thể trong bài báo này là các toán tử $R_m(f)$, đánh giá sai số xấp xỉ của phương pháp qua đại lượng đặc trưng ϱ_n.

Từ khóa: *Biểu diễn bán nội suy, không gian Besov, phương pháp tuyến tính.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Như chúng ta đã biết các phương pháp hiện đại của toán học được ứng dụng rất nhiều trong lĩnh vực xử lý tín hiệu, xử lý ảnh và thị giác máy tính. Bài toán khôi phục tín hiệu và loại nhiễu là một bài toán hết sức quan trọng trong lĩnh vực xử lý tín hiệu và xử lý ảnh, vì trong thực tế không có một loại máy nào có thể cho ta thông tin chính xác của tín hiệu, cũng như nhiễu luôn xuất hiện trong quá trình truyền tải, số hóa, nhiễu xuất hiện do điều kiện tự nhiên. Sự phụ thuộc của chất lượng tín hiệu và ảnh vào công nghệ xử lý thông tin đòi hỏi phải phát triển rất mạnh và có hiệu quả các thuật toán xử lý tín hiệu, xử lý ảnh và ứng dụng của chúng [1,2]. Khôi phục hàm số từ giá trị lấy mẫu tối ưu là một trong những bài toán cơ bản của lý thuyết xấp xỉ, được nhiều nhà toán học quan tâm vì ý nghĩa lý thuyết cũng như ứng dụng của nó. Khôi phục hàm số từ giá trị lấy mẫu bằng phương pháp tuyến tính là cách tiếp cận truyền thống được nhiều nhà toán học nghiên cứu, tuy nhiên cho đến nay nó vẫn không mất tính thời sự vì có nhiều ứng dụng. Bài báo nghiên cứu khôi phục và xấp xỉ hàm số bằng phương pháp tuyến tính không thích nghi. Khôi phục và xấp xỉ hàm số bằng phương pháp tuyến tính đã được nhiều nhà toán học nghiên cứu và có nhiều công trình được công bố. Trong [3] các tác giả đã nghiên cứu khôi phục và xấp xỉ hàm số bằng phương pháp tuyến tính cho lớp hàm số tuần hoàn thuộc không gian Besov $B^{\omega}_{p,\theta}$ với modul trơn đẳng hướng, các tác giả đã xây dựng được phương pháp tuyến tính và đánh giá được tốc độ hội tụ của phương pháp đó. GS.TSKH Đinh Dũng đã nghiên cứu khôi phục và xấp xỉ hàm số cho lớp hàm số không tuần hoàn bằng phương pháp tuyến tính trong các không gian Besov $B^{\alpha}_{p,\theta}$, $B^{\alpha,\beta}_{p,\theta}$ và $B^{\Omega}_{p,\theta}$ với modul trơn không đẳng hướng, xây dựng được các phương

[1] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

[2] *Khoa Kỹ thuật Công nghệ, Trường Đại học Hồng Đức*

pháp tuyến tính và đánh giá tiệm cận tốc độ hội tụ của phương pháp [6,7]. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ nghiên cứu vấn đề khôi phục và xấp xỉ hàm số không tuần hoàn bằng phương pháp tuyến tính trong không gian Besov $B^{\Omega}_{p,\theta}$ với modul trơn đẳng hướng, chúng tôi xây dựng được phương pháp tuyến tính bởi các B-spline và đánh giá tiệm cận được tốc độ hội tụ của phương pháp.

Định nghĩa 1. *Cho $f \in L_p(I^d)$, toán tử sai phân cấp l được định nghĩa bởi*

$$\Delta_h^l f(x) := \sum_{j=0}^{l} (-1)^{l-j} \binom{l}{j} f(x+jh).$$

Định nghĩa 2. *Nếu $f \in L_p(I^d)$ thì: $\omega_l(f,t)_p := \sup_{|h|<t} \left\| \Delta_h^l f \right\|_{p,\, I^d(lh)}$ được gọi là modul trơn cấp l của f, ở đây $I^d(lh) := \left\{ x : x, x+lh \in I^d \right\}$.*

Cho hàm số $\Omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ thỏa mãn các điều kiện

(i) $\Omega(t) > 0, \forall t > 0,$

(ii) $\Omega(t) \le c.\Omega(t'), \forall t, t' \in \mathbb{R}_+, t \le t',$

(iii) $\forall \gamma \ge 1, \exists C' = C'(\gamma)$ *sao cho* $\Omega(\gamma t) \le C'.\Omega(t), t \in \mathbb{R}_+.$

Chú ý rằng điều kiện (iii) chỉ cần thỏa mãn với một số $\gamma > 1$ cố định (chẳng hạn $\gamma = 2$).

Định nghĩa 3. Cho $0 < p, \theta \le \infty$ *không gian Besov $B^{\Omega}_{p,\theta}$ được định nghĩa là tập hợp các hàm $f \in L_p(I^d)$ sao cho chuẩn Besov sau là hữu hạn*

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} := \|f\|_p + |f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}, \text{ ở đây } |f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}$$

là nửa chuẩn Besov, xác định bởi

$$|f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} := \begin{cases} \left(\int_I \left\{ \omega_l(f,t)_p / \Omega(t) \right\}^{\theta} \dfrac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}} & \theta < \infty \\ \sup_{t \in I} \left\{ \omega_l(f,t)_p / \Omega(t) \right\} & \theta = \infty. \end{cases}$$

Kí hiệu $U^{\Omega}_{p,\theta}$ là hình cầu đơn vị của không gian $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

2. BIỂU DIỄN HÀM SỐ QUA CÁC *B*-SPLINE

Định nghĩa 4. *Ký hiệu N_r là B-spline chuẩn tắc bậc r với các nút tại các điểm $0,1,...,r$ được xác định như sau: N_1 là hàm đặc trưng trên nửa khoảng* [0, 1)*; với $r \ge 2$, N_r được định nghĩa bởi tích chập*

$$N_r(x) := \int_{-\infty}^{\infty} N_{r-1}(x-y) N_1(y) dy.$$

Đặt $M_r(x):=N_r(x+\frac{r}{2})$ *được gọi là B-spline trung tâm bậc r.*

Cho một số nguyên dương *r*, gọi M là một B-spline trung tâm bậc 2*r* với giá $[-r,r]$ và các nốt là các điểm nguyên $-r,..., 0,...r$. Định nghĩa *d*-biến B-spline như sau

$$M(x):=\prod_{i=0}^{d} M(x_i),\ x=(x_1,x_2,\ldots,x_d), \tag{2.1}$$

và định nghĩa B spline sóng nhỏ: $M_{k,s}(x):=M(2^k x-s),$

Cho một số không âm *k* và $s\in\mathbb{Z}^d$. Ký hiệu M là tập hợp tất cả $M_{k,s}$ không triệt tiêu trên I^d. Cho $\lambda=\{\lambda(j)\}_{j\in P(\mu)}$ là dãy chẵn hữu hạn, tức là $\lambda(j)=\lambda(-j)$, ở đây $P^d(\mu):=\{j\in\mathbb{Z}:|j|\le\mu\}$ và $\mu\ge r-1$. Chúng ta định nghĩa toán tử tuyến tính Q cho hàm f trên $\mathbb{R}^d$ bởi

$$Q(f,x):=\sum_{s\in\mathbb{Z}^d}\Lambda(f,s)M(x-s), \tag{2.2}$$

Ở đây: $$\Lambda(f,s):=\sum_{j\in P^d(\mu)}\lambda(j)f(s-j). \tag{2.3}$$

Khi đó, từ định nghĩa của *B*-spline suy ra toán tử Q bị chặn trên $C(\mathbb{R}^d)$ và $\|Q(f)\|_{C(\mathbb{R}^d)}\le\|\Lambda\|\|f\|_{C(\mathbb{R}^d)}$, trong đó $\|\Lambda\|=\sum_{j\in P^d(\mu)}|\lambda(j)|.$

Ký hiệu $\mathcal{P}_{2r-1}$ là tập hợp các đa thức đại số có bậc không vượt quá $2r-1$. Một toán tử Q được xác định từ (2.2 - 2.3) tái tạo lại $\mathcal{P}_{2r-1}$, tức là $Q(p)=p,\ p\in\mathcal{P}_{2r-1}$, được gọi là một toán tử giả nội suy trong $C(\mathbb{R}^d)$.

Giả sử Q là một toán tử giả nội suy từ (2.2 - 2.3), cho $h>0$ và một hàm f xác định trên $\mathbb{R}^d$, chúng ta xác định toán tử $Q(.,h)$ bởi $Q(f;h):=\sigma_h{\circ}Q{\circ}\sigma_{1/h}(f)$, ở đây $\sigma_h(f,x)=f(x/h)$. Từ định nghĩa của $Q(f,h)$, ta có $Q(f,x;h)=\sum_k\Lambda(f,k;h)M(h^{-1}x-k)$, với $\Lambda(f,k;h)=\sum_{j\in P^d(\mu)}\lambda(j)f\big(h(k-j)\big).$

Toán tử $Q(.,h)$ có các tính chất tương tự như toán tử Q, cũng được gọi là một toán tử giả nội suy trong $C(\mathbb{R}^d)$. Nhưng $Q(.,h)$ không được định nghĩa cho f trên I^d, và do đó không khôi phục được hàm số f với các điểm lấy mẫu trong I^d. Một cách tiếp cận được GS.TSKH Đinh Dũng đề xuất trong [4,5] để xây dựng toán tử giả nội suy cho một hàm số trên I^d là mở rộng nó bằng các đa thức nội suy Lagrange.

Cho một số nguyên không âm *k*, đặt $x_j=j2^{-k},\ j\in\mathbb{Z}$. Nếu f là một hàm số trên I, Ký hiệu $U_k(f)$, $V_k(f)$ lần lượt là các đa thức nội suy Lagrange tại 2*r* điểm bên trái $x_0,x_1,\ldots,x_{2r-1}$ và 2*r* điểm bên phải $x_{2^k-2r+1},x_{2^k-2r+3},\ldots,x_{2^k}$ trên đoạn I được xác định bởi:

$$U_k(f,x) := f(x_0) + \sum_{s=1}^{2r-1} \frac{2^{sk} \Delta_{2^{-k}}^{s} f(x_0)}{s!} \prod_{j=0}^{s-1} (x - x_j),$$

$$V_k(f,x) := f(x_{2^k-2r+1}) + \sum_{s=1}^{2r-1} \frac{2^{sk} \Delta_{2^{-k}}^{s} f(x_{2^k-2r+1})}{s!} \prod_{j=0}^{s-1} (x - x_{2^k-2r+1+j}).$$

Hàm số $\overline{f}$ được định nghĩa là hàm số mở rộng của f trên $\mathbb{R}$ như sau:

$$\overline{f}_k(x) = \begin{cases} U_k(f,x), & x < 0, \\ f(x), & 0 \le x \le 1, \\ V_k(f,x), & x > 1. \end{cases}$$

Nếu f liên tục trên I thì f liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử Q là một toán tử giả nội suy (2.2 - 2.3) trong $C(\mathbb{R})$. Chúng ta xây dựng toán tử Q_k xác định bởi

$$Q_k(f,x) := Q\left(\overline{f}_k, x; 2^{-k}\right), x \in I,$$

với hàm f trên I. Khi đó,

$$Q_k(f,x) = \sum_{s \in J(k)} a_{k,s}(f) M_{k,s}(x), \forall x \in I,$$

Trong đó: $J(k) := \left\{ s \in \mathbb{Z}, -r < s < 2^k + r \right\}$

và: $a_{k,s}(f) := \Lambda\left(\overline{f}_k, s; 2^{-k}\right) = \sum_{|j| \le \mu} \lambda(j) \overline{f}_k\left(2^{-k}(s-j)\right).$

Chúng ta nhận thấy Q_k cũng là toán tử giả nội suy trên $C(I)$. Cho f là hàm số trên I^d Giả sử Q là một toán tử giả nội suy có dạng (2.2)-(2.3) trong $C(\mathbb{R}^d)$. Chúng ta xây dựng toán tử nhiều biến Q_k được xác định bởi

$$Q_k(f,x) = \sum_{s \in J(k)} a_{k,s}(f) M_{k,s}(x), \forall x \in I^d,$$

ở đây $J(k) := \left\{ s \in \hbar^d, -r < s_i < 2^{k+k_0} + r, i = 1,2,\ldots,d \right\}$ là tập hợp các giá trị của s sao cho $M_{k,s}$ không đồng nhất bằng 0 trên I^d. Chú ý rằng

$$a_{k,s}(f) = a_{k,s_1}((a_{k,s_2}(\ldots a_{k,s_d}(f))), \tag{2.4}$$

Ở đây các hàm hệ số a_{k,s_i} được áp dụng tương tự cho hàm số một biến khi xem f là hàm số một biến *xi* với các biến còn lại cố định.

Tương tự như toán tử Q và $Q(.; h)$, thì toán tử Q_k là tuyến tính bị chặn trên $C(I^d)$ và tái tạo $\mathcal{P}_{2r-1}$. Đặc biệt, chúng ta có:

$$\|Q_k(f)\|_{C(\mathbb{R}^d)} \le C\|\Lambda\|.\|f\|_{C(\mathbb{R}^d)}, \tag{2.5}$$

Với mỗi $f \in C(I^d)$, với hằng số C không phụ thuộc k và $Q_k(\varphi^*) = \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_{2r-1}$, ở đây φ^* là hạn chế của φ trên I^d. Toán tử nhiều biến Q_k được gọi là toán tử giả nội suy trên $C(I^d)$.

Cho $k \in \mathbb{Z}_+$, đặt $q_k := Q_k - Q_{k-1}$ với quy ước $Q_{-1}(f) = 0$. Ta định nghĩa Q_k bởi $Q_k = \sum_{k' \le k} q_{k'}$.

Bổ đề 1. *Giả sử* $f \in C(I^d)$. *Khi đó, ta có*

$$\left\| f - Q_k(f) \right\|_\infty \le C\omega_{2r}(f, 2^{-k})_\infty. \tag{2.6}$$

Do đó:
$$\left\| f - Q_k(f) \right\|_\infty \to 0, k \to \infty. \tag{2.7}$$

Chứng minh.

Bất đẳng thức (2.6) được suy ra từ (2.29)-(2.31) trong [4] và bất đẳng thức (2.5). Cho bất kỳ $f \in C(I^d)$, từ (2.7) f có thể biểu diễn thành chuỗi

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} q_k(f), \tag{2.8}$$

với $q_k(f) = \sum_{s \in J(k)} c_{k,s}(f) M_{k,s}$,

Chuỗi này hội tụ theo chuẩn trong $L_\infty(I^d)$, ở đây $c_{k,s}$ là các phiếm hàm hệ số của *f*, được xác định như dưới đây. Đầu tiên xác định $c_{k,s}$ cho hàm số một biến (*d* = 1). Cụ thể

$$c_{k,s}(f) := a_{k,s}(f) - a'_{k,s}(f), k \ge 0,$$

$$a'_{k,s}(f) := 2^{-2r+1} \sum_{(m,j) \in C_r(k,s)} \binom{2r}{j} a_{k-1,m}(f), k > 0, a'_{0,s}(f) := 0,$$

Ở đây $C_r(k,s) := \{(m,j) : 2m + j - r = s, m \in J(k-1), 0 \le j \le 2r\}$, với $k > 0, C_r(0,s) := \{0\}$.

Trong trường hợp hàm nhiều biến, chúng ta xác định $c_{k,s}$ tương tự như (2.4) cho $a_{k,s}$, tức là $c_{k,s}(f) = c_{k,s_1}((c_{k,s_2}(\ldots c_{k,s_d}(f)))$, ở đây các hàm hệ số c_{k,s_i} áp dụng cho hàm số một biến *f* khi xem *f* là hàm số với biến x_i với các biến còn lại cố định.

Ký hiệu $A_n(f) \ll B_n(f)$ nếu $A_n(f) \le C.B_n(f)$ ở đây *C* là hằng số độc lập với *n* và $f \in W$; $A_n(f) \asymp B_n(f)$ nếu $A_n(f) \ll B_n(f)$ và $B_n(f) \ll A_n(f)$.

Cho $k \in \mathbb{Z}_+$ ký hiệu $\Sigma(k)$ là không gian các B-splines $M_{k,s}$, $s \in J(k)$. Nếu $0 < p \le \infty$ thì $g \in \Sigma(k)$ được biểu diễn bởi $g = \sum_{s \in J(k)} a_s M_{k,s}$ và đẳng thức sau (xem [5])

$$\| g \|_p \asymp 2^{-dk/p} \left\| \{a_s\} \right\|_{p,k}, \tag{2.9}$$

Ở đây $\left\| \{a_s\} \right\|_{p,k} := \left(\sum_{s \in J(k)} | a_s |^p \right)^{1/p}$, với vế phải thay bằng supremum khi $p = \infty$.

Từ (2.9) cho hàm số liên tục f trên I^d, chúng ta có các nửa chuẩn sau đây tương đương với nhau

$$B_2(f) := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \left\| q_k(f) \right\|_p / \Omega(2^{-k}) \right\}^\theta \right)^{1/\theta}$$

$$B_3(f) := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\{ 2^{-dk/p} \left\| \{ c_{k,s}(f) \} \right\|_{p,k} / \Omega(2^{-k}) \right\}^\theta \right)^{1/\theta}$$

Định lý sau đây đã được chứng minh trong [7,8].

Định lý 1. Cho $0 < p, \theta \le \infty$ và hàm số Ω sao cho tồn tại các hằng số $\mu, \rho > 0$ và C_1, C_2 thỏa mãn

$$\begin{aligned} &\Omega(t).t^{-\mu} \le C_1 \Omega(t').t'^{-\mu}, t \le t'; t, t' \in I, \\ &\Omega(t).t^{-\rho} \ge C_2 \Omega(t').t'^{-\rho}, t \le t'; t, t' \in I. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Khi đó, chúng ta có

i) Nếu $\mu > \frac{d}{p}$ và $\rho < 2r$ thì một hàm số $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ có thể biểu diễn thành chuỗi (2.8) và $B_2(f) \ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}$.(2.11)

ii) Nếu $\rho < \min(2r, 2r-1+\frac{1}{p})$ và g là một hàm số được biểu diễn bởi $g = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} g_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \sum_{s\in J(k)} c_{k,s} M_{k,s}$ thỏa mãn: $B_4(g) := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \left\{ \|g_k\|_p / \Omega(2^{-k}) \right\}^{\theta} \right)^{1/\theta} < \infty$, thì $g \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ và $\|g\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \ll B_4(g)$.

iii) Nếu $\mu > \frac{d}{p}$ và $\rho < \min(2r, 2r-1+\frac{1}{p})$ thì một hàm số f xác định trên I^d thuộc $B^{\Omega}_{p,\theta}$ khi và chỉ khi f có thể biểu diễn thành chuỗi có dạng (2.8) thỏa mãn điều kiện (2.11). Hơn nữa, chuẩn $\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}$ là tương đương với chuẩn $B_2(f)$.

Hệ quả 1. Cho $0 < p, \theta \le \infty$ và Ω thỏa mãn các giả thuyết của ý (ii) trong Định lý 1. Khi đó, với bất kỳ $k \in \mathbb{Z}_+$, chúng ta có: $\|g\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \ll \|g_k\|_p / \Omega(2^{-k})$, $g \in \Sigma(k)$.

3. KHÔI PHỤC HÀM SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH

Định nghĩa 5. Cho $X_n = \{x^j\}_{j=1}^n$ là n điểm của I^d, $\Phi_n = \{\varphi_j\}_{j=1}^n$ là họ n hàm số thuộc không gian $L_q(I^d)$. Để khôi phục hàm số f được xác định trên I^d từ các giá trị lấy mẫu $f(x^1), \ldots, f(x^n)$, chúng ta định nghĩa phương pháp tuyến tính dựa trên giá trị lấy mẫu $L_n(X_n, \Phi_n, .)$ bởi công thức sau đây

$$L_n(X_n, \Phi_n, f) := \sum_{j=1}^{n} f(x^j)\varphi_j \tag{3.1}$$

Cho $W \subset L_q(I^d)$. Chúng ta nghiên cứu tính tối ưu của phương pháp tuyến tính có dạng (1.4) để khôi phục hàm số $f \in W$ từ n giá trị lấy mẫu trên bằng đại lượng sau $\varrho_n(W, L_q(I^d)) := \inf_{X_n, \Phi_n} \sup_{f\in W} \|f - L_n(X_n, \Phi_n, f)\|_q$.

Định nghĩa 6. Cho số nguyên không âm m, đặt $K(m) := \{(k,s) : k \in \mathbb{Z}_+, k \le m, s \in I^d(k)\}$, ở đây $I^d(k) = \{s \in \mathbb{Z}_+^d : 0 \le s_i \le 2^k, i = 1,\dots,d\}$ và ký hiệu $M(m)$ là tập hợp gồm các B-splines $M_{k,s}, k \le m, s \in J(k)$. Chúng ta định nghĩa toán tử R_m của các hàm số $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ bởi $R_m(f) := \sum_{k \le m} q_k(f) = \sum_{k \le m} \sum_{s \in J(k)} c_{k,s}(f) M_{k,s}$, và lưới $G(m)$ của các điểm trong I^d, $G(m) := \{2^{-k}s : (k,s) \in K(m)\}$.

Bổ đề 2. Toán tử R_m xác định một phương pháp tuyến tính có dạng (3.1) trên lưới $G(m)$. Cụ thể,

$$R_m(f) = L_n(X_n, \Phi_n, f) = \sum_{(k,s) \in K(m)} f(2^{-k}s)\psi_{k,s},$$

Ở đây $X_n := G(m), \Phi_n := \{\psi_{k,s}\}_{(k,s)\in K(m)}$, $n := |G(m)| = \sum_{k \le m} (2^k + 1)^d$, $\psi_{k,s}$ được xác định là tổ hợp tuyến tính của không quá N các B-splines $M_{k,s} \in M(m)$ với N độc lập với k, j, m và f.

Định lý 2. Cho $0 < p, q, \theta \le \infty$, Ω thỏa mãn các điều kiện của Định lý 1 và $\mu > d/p, \rho < \min(2r, 2r - 1 + 1/p)$. Giả sử với mỗi $n \in \mathbb{Z}_+$, m là số lớn nhất thỏa mãn $|G(m)| \le n.$ (3.2)

Khi đó R_m xác định phương pháp tuyến tính lấy mẫu tối ưu cho $\varrho_n := \varrho_n(U^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ như sau: $R_m(f) = L_n(X_n^*, \Phi_n^*, f) = \sum_{(k,s)\in K(m)} f(2^{-k}s)\psi_{k,s}$,

Ở đây $X_n^* := G(m) = \{2^{-k}s : (k,s) \in K(m)\}, \Phi_n^* := \{\psi_{k,s}\}_{(k,s)\in K(m)}$, và chúng ta có đánh giá tiệm cận sau đây: $\sup_{f \in U^{\Omega}_{p,\theta}} \|f - R_m(f)\|_q \asymp \varrho_n \asymp \Omega(n^{-1/d}) n^{(1/p - 1/q)_+}$. (3.4)

Chứng minh

Đánh giá cận trên. Chúng ta dễ thấy rằng

$$2^{dm} \ll |G(m)| = \sum_{k \le m} (2^k + 1)^d \ll \sum_{k \le m} 2^{dk} \ll 2^{dm}.$$

Do đó, từ (3.2) thì: $2^{dm} \asymp n.$ (3.5)

Trường hợp $p \ge q$. Xuất phát từ bất đẳng thức $\|f\|_q \le \|f\|_p$ dẫn đến chứng minh cho trường hợp này với $q = p$. Do $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\infty}$, chúng ta chỉ cần chứng minh (3.4) cho $U^{\Omega}_{p,\infty}$. Chúng ta lấy tùy ý $m \in \mathbb{Z}_+$, $\sup_{f \in U^{\Omega}_{p,\infty}} \|f - Q_m(f)\|_q \ll \Omega(2^{-m}).$ (3.6)

Lấy bất kỳ $f \in U^{\Omega}_{p,\infty}$. Đặt $\tau = \min(p,1)$, sử dụng Đinh lý 1 chúng ta nhận được

$$\begin{aligned} \|f - Q_m(f)\|_p^{\tau} &\ll \sum_{k > m} \|q_k(f)\|_p^{\tau} \\ &\ll \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \left[\|q_k(f)\|_p / \Omega(2^{-k})\right]^{\tau} \sum_{k > m} \Omega(2^{-k})^{\tau} \qquad (3.7) \\ &\ll \|f\|^{\tau}_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \sum_{k > m} \Omega(2^{-k})^{\tau} \ll \sum_{k > m} \Omega(2^{-k})^{\tau}. \end{aligned}$$

Từ (2.10) chúng ta suy ra rằng $\Omega(2^{-k}) \ll \Omega(2^{-m})2^{-\mu(k-m)}$ cho bất kỳ $k > m$.

Do đó, chúng ta tiếp tục đánh giá (3.7) như sau

$$\left\|f - Q_m(f)\right\|_p^\tau \ll \sum_{k>m} \{\Omega(2^{-m})2^{-(k-m)\mu}\}^\tau \ll \Omega(2^{-m})^\tau \sum_{k>m} \{2^{-(k-m)\mu}\}^\tau \ll \Omega(2^{-m})^\tau.$$

Điều này đồng nghĩa với việc chứng minh bất đẳng thức (3.6). Chú ý rằng số giá trị lấy mẫu trong $Q_m(f)$ là $|G(m)|$. Chúng ta xác định $R_m(f) = Q_m(f)$. Bởi (3.5), chúng ta nhận được: $$\sup_{f \in U}\left\|f - Q_m(f)\right\|_q \ll \Omega(n^{-1/d}).$$

Trường hợp $p < q$. Đầu tiên chúng ta xem xét trường hợp $p < q < \infty$. Cho $f \in B_{p,\theta}^\Omega$, Bởi [6, Bổ đề 5.3] chúng ta có: $\left\|f - R_m(f)\right\|_p^q \ll \sum_{k>m}\{2^{(d/p-d/q)k}\left\|q_k(f)\right\|_p\}^q$.

Nếu $\theta \le q$, thì

$$\begin{aligned}\left\|f - R_m(f)\right\|_q &\ll \left(\sum_{k>m}\{2^{(d/p-d/q)k}\left\|q_k(f)\right\|_p\}^\theta\right)^{1/\theta}\\ &\ll \sup_{k>m} 2^{(d/p-d/q)k}\Omega(2^{-k})\left(\sum_{k>m}\{\left\|q_k(f)\right\|_p / \Omega(2^{-k})\}^\theta\right)^{1/\theta} \\ &\ll \left\|f\right\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \sup_{k>m} 2^{(d/p-d/q)k}\Omega(2^{-k})\end{aligned} \tag{3.8}$$

Từ (2.10) chúng ta nhận được: $\Omega(2^{-k})2^{\mu k} \ll \Omega(2^{-m})2^{\mu m}, k > m.$

Do đó: $\Omega(2^{-k})2^{(d/p-d/q)k} \ll \Omega(2^{-m})2^{(d/p-d/q)m}2^{(\mu-(d/p-d/q))(m-k)}, k > m,$ (3.9)

Suy ra $\Omega(2^{-k})2^{(d/p-d/q)k} \ll \Omega(2^{-m})2^{(d/p-d/q)m}, k > m$. Cho $f \in U_{p,\theta}^\Omega$, từ bất đẳng thức cuối cùng và (3.8) chúng ta thấy rằng: $\left\|f - R_m(f)\right\|_q \ll \Omega(2^{-m})2^{(d/p-d/q)m}$.

Bởi bất đẳng thức cuối cùng và (3.5) chúng ta suy ra được

$$\left\|f - R_m(f)\right\|_q \ll \Omega(n^{-1/d})n^{(1/p-1/q)}. \tag{3.10}$$

Đánh giá cận trên của ρ_n cho trường hợp $\theta \le q$ được chứng minh.

Nếu $\theta > q$ thì

$$\begin{aligned}\left\|f - R_m(f)\right\|_q^q &\ll \sum_{k>m}\{2^{(d/p-d/q)k}\left\|q_k(f)\right\|_p\}^q\\ &= \sum_{k>m}\{\Omega(2^{-k})2^{(d/p-d/q)k}\}^q\{\left\|q_k(f)\right\|_p / \Omega(2^{-k})\}^q.\end{aligned}$$

Hơn nữa, có một số q^* thỏa mãn $1/q = 1/\theta + 1/q^*$. Áp dụng bất đẳng thức Holder, chúng ta có

$$\|f - R_m(f)\|_q \ll \left(\sum_{k>m} \{\Omega(2^{-k})2^{(d/p-d/q)k}\}^q \{\|q_k(f)\|_p \,/\, \Omega(2^{-k})\}^q\right)^{1/q}$$

$$\ll \left(\sum_{k>m} \{\Omega(2^{-k})2^{(d/p-d/q)k}\}^{q^*}\right)^{1/q^*} \left(\sum_{k>m} \{\|q_k(f)\|_p \,/\, \Omega(2^{-k})\}^{\theta}\right)^{1/\theta}$$

$$\ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \left(\sum_{k>m} \{\Omega(2^{-k})2^{(d/p-d/q)k}\}^{q^*}\right)^{1/q^*}. \qquad (3.11)$$

Sử dụng (3.9) chúng ta tiếp tục ước lượng (3.11) như sau

$$\|f - R_m(f)\|_q \ll \Omega(2^{-m})2^{(d/p-d/q)m}\left(\sum_{k>m}\{2^{(\mu-(d/p-d/q))(m-k)}\}^{q^*}\right)^{1/q^*} \ll \Omega(2^{-m})2^{(d/p-d/q)m}. \quad (3.12)$$

Từ (3.12), (3.5) chúng ta nhận được (3.10). Đánh giá cận trên của ρ_n được chứng minh cho $p < q < \infty$.

Trong trường hợp $p < q = \infty$, chứng minh tương tự như trường hợp $p < q < \infty$ bằng cách sử dụng bất đẳng thức sau

$$\|f - R_m(f)\|_\infty \ll \sum_{k>m} 2^{dk/p} \|q_k(f)\|_p.$$

Đánh giá cận dưới. Nếu $W \subset L_q(I^d)$, thì từ định nghĩa của $\rho_n(W, L_q(I^d))$ chúng ta có: $\rho_n(W, L_q(I^d)) \gg \inf_{X_n=\{x^j\}_{j=1}^n \subset I^d} \ \sup_{f\in W: f(x^j)=0,\, j=1,\dots,n} \|f\|_q$. (3.13)

Cố định một số $r = 2^m$ với số nguyên không âm m sao cho $\rho < \min(r, r-1+1/p)$.

Cho một số nguyên $\eta > m$. Xem xét hình hộp $J(s) \subset I^d$

$J(s) := \{x \in I^d : 2^{-\eta+m} s_j \le x_j < 2^{-\eta+m}(s_j+1),\ j = 1,\dots,d\},\ s \in Z(\eta),$

Ở đây: $Z(\eta) := \{s \in \mathbb{R}^d_+ : 0 \le s_j \le 2^{\eta-m} - 1,\ j = 1,\dots,d\}$.

Với mỗi n cho trước, chúng ta tìm được η thỏa mãn

$$n \asymp 2^{d(\eta-m)} = |Z(\eta)| \ge 2n. \qquad (3.14)$$

Đặt $X_n = \{x^j\}_{j=1}^n$ là một tập con tùy ý gồm n điểm trong I^d. Do $J(s) \cap J(s') = \varnothing$ với $s \ne s'$, và $|Z(\eta)| \ge 2n$, có $Z^*(\eta) \subset Z(\eta)$ thỏa mãn $|Z^*(\eta)| \ge n$ và $X_n \cap \{\cup_{s\in Z^*(\eta)} J(s)\} = \varnothing$. (3.15)

Trường hợp $p \le q$. Xem xét hàm số $g^* \in \Sigma(\eta)$ xác định bởi

$$g^* := \lambda \Omega(2^{-\eta}) 2^{d\eta/p} M_{\eta, rs+r/2},\ s \in Z^*(\eta),$$

Ở đây $M_{\eta,rs+r/2}$ là B-splines có bậc r. Bởi (2.9) chúng ta có

$$\left\|g^*\right\|_q \asymp \lambda\Omega(2^{-\eta})2^{(d/p-d/q)\eta} \qquad (3.16) \qquad \text{và} \qquad \left\|g^*\right\|_p \asymp \lambda\Omega(2^{-\eta}).$$

Do đó, từ Hệ quả 1 tồn tại $\lambda > 0$ độc lập với η và n sao cho $g^* \in U^{\Omega}_{p,\theta}$. Chú ý rằng $M_{\eta,rs+r/2}(x), x \notin J(s)$, cho bất kỳ, $s \in Z^*(\eta)$ và do đó, từ (3.15) $g^*(x^j) = 0, j = 1,\ldots,n$. Từ (3.13), (3.16) và (3.14) chúng ta nhận được

$$\varrho_n \gg \left\|g^*\right\|_q \asymp \Omega(n^{-1/d})n^{(1/p-1/q)}.$$

Chúng ta chứng minh xong đánh giá cận dưới của ϱ_n cho trường hợp $p \le q$.

Trường hợp $p > q$. xét hàm số $g^* \in \Sigma(\eta)$ xác định bởi

$$g^* := \lambda\Omega(2^{-\eta}) \sum_{s\in Z^*(\eta)} M_{\eta,rs+r/2}.$$

Từ (2.9) thấy rằng: $\left\|g^*\right\|_q \asymp \lambda\Omega(2^{-\eta})$, và $\left\|g^*\right\|_p \asymp \lambda\Omega(2^{-\eta})$.

Do đó từ Hệ quả 1 có $\lambda > 0$ độc lập với η và n sao cho $g^* \in U^{\Omega}_{p,\theta}$. Chú ý rằng $g^*(x^j) = 0, j = 1,\ldots,n$. Từ (3.13), (3.14), (3.17) chúng ta suy ra

$$\varrho_n \gg \left\|g^*\right\|_q \asymp \Omega(n^{-1/d}).$$

Đánh giá cận dưới của ϱ_n cho trường hợp $p > q$ được chứng minh.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu vấn đề khôi phục và xấp xỉ hàm số bằng phương pháp không thích nghi cho lớp hàm số không tuần hoàn thuộc không gian Besov có độ trơn đẳng hướng. chúng tôi đạt được kết quả mới đó là xây dựng phương pháp tuyến tính và đánh giá tốc độ hội tụ của phương pháp qua đại lượng đặc trưng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Ronald A. Devore (1988), Vasil A. Popov, *Interpolation of Besov spaces, Transactions of the American Mathematical Society*, 305, 397-413.

[2] E. Novak, H. Triebel (2006), Function spaces in Lipschitz domains and optimal rates of convergence for sampling, *Constr. Approx*, 23, 325-350

[3] Dinh Dung, Mai Xuan Thao (2002), Approximate recovery of periodic functions using wavelet decompositions, *Acta Math. Vietnamica*, 27, pp. 185-195.

[4] Dinh Dung (2009), Non-linear sampling recovery based on quasi-interpolant wavelet representations, *Adv. Comput. Math*, 30, 375-401.

[5] Dinh Dung (2011), Optimal adaptive sampling recovery, *Adv. Comput. Math*, 31, 1-41.

[6] Dinh Dung (2011), B-spline quasi-interpolant representations and sampling recovery of functions with mixed smoothness, *Journal of Complexity*, 27, 541-567.

[7] Dinh Dung (2016), Sampling and cubature on sparse grids based on a B-spline quasiinterpolation, *Found. Comp. Math,* 16, 1193-1240.

[8] Nguyen Manh Cuong, Mai Xuan Thao (2017), Adaptive sampling recovery of functions with bounded modulus of smoothness, *Acta Mathematica Vietnamica*, 42, 113-127.

RECOVERY OF FUNCTIONS *IN BESOV-TYPE SPACES* BY *LINEAR SAMPLING METHODS*

Nguyen Manh Cuong, Bui Khac Thien

ABSTRACT

We study the recovery and approximation of the class of non-periodic functions in Besov space with isotropic smoothness by non-adaptive linear method. Constructing a linear method based on the sampling value, specifically in this paper is the operator, evaluating the approximate error of the method by the characteristic quantity

Keywords: *Quasi-interpolation representation, Besov-type spaces, linear sampling method.*

** Ngày nộp bài:31/7/2020; Ngày gửi phản biện: 3/8/2020; Ngày duyệt đăng: 28/10/2020*

** Bài báo này là kết quả nghiên cứu từ đề tài cấp cơ sở mã số ĐT-2018-21 của Trường Đại học Hồng Đức.*