MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SINH (XÁC SUẤT) CỦA VÉC TƠ NGẪU NHIÊN NGUYÊN KHÔNG ÂM

Nguyễn Mạnh Hùng[1]

TÓM TẮT

Bài báo nghiên cứu về một số tính chất của véc tơ ngẫu nhiên nhận các giá trị nguyên, không âm.

Từ khóa: *Hàm sinh (xác suất), Véc tơ ngẫu nhiên nguyên, không âm.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong bài báo *Một số tính chất cơ bản của hàm dẫn xuất (2020)* [1] chúng tôi đã nghiên cứu các tính chất cơ bản của hàm dẫn xuất trong đại lượng ngẫu nhiên một chiều, ở bài viết này chúng tôi tiến hành nghiên cứu một số tính chất của hàm sinh (xác suất) của véc tơ ngẫu nhiên nhận các giá trị nguyên, không âm.

2. CÁC KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

2.1. Hàm sinh (xác suất) của véc tơ ngẫu nhiên

Trong việc áp dụng lý thuyết xác suất vào thực tiễn, chúng ta thường gặp những bài toán mà trong kết quả của thí nghiệm được mô tả bởi không phải một mà nhiều đại lượng ngẫu nhiên nhận các giá trị nguyên không âm. Chẳng hạn, khi gieo ngẫu nhiên hai con xúc xắc cân đối và đồng chất, kết quả của mỗi lần gieo phụ thuộc vào hai đại lượng ngẫu nhiên, đó là số chấm xuất hiện trên con xúc xắc thứ nhất và số chấm xuất hiện trên con xúc xắc thứ hai. Khi quan sát số lần thử của hai phép thử Bernoulli để có một lần cả hai phép thử thành công. Khi quan sát cặp các đại lượng ngẫu nhiên có phân phối xác suất nhị thức, siêu bội, Zipf, … Hơn nữa nhiều phân phối xác suất liên tục lại được xuất phát từ phân phối xác suất rời rac.

Vì vậy việc nghiên cứu một bộ các đại lượng ngẫu nhiên nhận các giá trị nguyên không âm là cần thiết.

Định nghĩa 2.1. (xem [2]) Giả sử $X_1, X_2, \dots, X_k$ là k đại lượng ngẫu nhiên nhận các giá trị nguyên không âm cùng liên quan đến thí nghiệm ngẫu nhiên đang xét. Khi đó người ta gọi bộ gồm k đại lượng ngẫu nhiên đó là một véc tơ ngẫu nhiên k chiều nhận các giá trị nguyên không âm. Kí hiệu: $\left(X_1, X_2, \dots, X_k\right)$.

Định nghĩa 2.2. (xem [2]) Giả sử $\left(X_1, X_2, \dots, X_k\right)$ là một véc tơ ngẫu nhiên nhận các giá trị nguyên không âm với $P\left[\left(X_1 = i_1\right) \cap \left(X_2 = i_2\right) \cap \dots \cap \left(X_k = i_k\right)\right] = P_{i_1 i_2 \dots i_k}$. Khi đó

[1] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức; Email: manhhung1969@gmail.com*

hàm số $f(s_1,s_2,\dots,s_k)=E\left(s_1^{X_1}s_2^{X_2}\dots s_k^{X_k}\right)$ được gọi là hàm sinh (xác suất) của véc tơ ngẫu nhiên $(X_1,X_2,\dots,X_k)$.

Nhận xét 2.1.

Hàm sinh (xác suất) $f(s_1,s_2,\dots,s_k)=\sum_{i_1,i_2,\dots,i_k=0}^{\infty}P_{i_1i_2\dots i_k}.s_1^{i_1}s_2^{i_2}\dots s_k^{i_k}$.

Hàm sinh (xác suất) $f(s_1,s_2,\dots,s_k)$ xác định ít nhất trên $[-1;1]\times[-1;1]\times\dots\times[-1;1]$

Bổ đề 2.1. Giả sử các đại lượng ngẫu nhiên $X_1,X_2,\dots,X_k$ nhận các giá trị tương ứng là $i_1,i_2,\dots,i_k$ với các xác suất $P_{i_1}^1,P_{i_2}^2,\dots,P_{i_k}^k$ và véc tơ ngẫu nhiên $(X_1,X_2,\dots,X_k)$ nhận giá trị $(i_1,i_2,\dots,i_k)$ với xác suất là $P_{i_1i_2\dots i_k}$. Khi đó nếu

$\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}\cdots\sum_{i_k=0}^{n_k}P_{i_1i_2\dots i_k}=\left(\sum_{i_1=0}^{n_1}P_{i_1}^1\right).\left(\sum_{i_2=0}^{n_2}P_{i_2}^2\right)\dots\left(\sum_{i_k=0}^{n_k}P_{i_k}^k\right)$, với $n_1,n_2,\dots,n_k$ tùy ý

thì $X_1,X_2,\dots,X_k$ là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập.

Chứng minh.

Từ giả thiết $\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}\cdots\sum_{i_k=0}^{n_k}P_{i_1i_2\dots i_k}=\left(\sum_{i_1=0}^{n_1}P_{i_1}^1\right).\left(\sum_{i_2=0}^{n_2}P_{i_2}^2\right)\dots\left(\sum_{i_k=0}^{n_k}P_{i_k}^k\right)$, với $n_1,n_2,\dots,n_k$ tùy ý suy ra

$$P\left[(X_1\le n_1)\cap(X_2\le n_2)\cap\dots\cap(X_k\le n_k)\right]=\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2}\cdots\sum_{i_k=0}^{n_k}P_{i_1i_2\dots i_k}$$

$$\Leftrightarrow P\left[(X_1\le n_1)\cap(X_2\le n_2)\cap\dots\cap(X_k\le n_k)\right]=\left(\sum_{i_1=0}^{n_1}P_{i_1}^1\right).\left(\sum_{i_2=0}^{n_2}P_{i_2}^2\right)\dots\left(\sum_{i_k=0}^{n_k}P_{i_k}^k\right)$$

$$\Leftrightarrow P\left[(X_1\le n_1)\cap(X_2\le n_2)\cap\dots\cap(X_k\le n_k)\right]=P(X_1\le n_1).P(X_2\le n_2)\dots P(X_k\le n_k).$$

Suy ra các biến cố $(X_1\le n_1);(X_2\le n_2);\dots;(X_k\le n_k)$ độc lập với nhau với $n_1,n_2,\dots,n_k$ tùy ý. Suy ra $X_1,X_2,\dots,X_k$ là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập.

Định lý 2.1. (xem [1] và [4]) *Giả sử các đại lượng ngẫu nhiên $X_1,X_2,\dots,X_k$ lần lượt có các hàm dẫn xuất là $f_1(\mathrm{s}_1), f_2(\mathrm{s}_2),\dots, f_k(\mathrm{s}_k)$; còn hàm sinh (xác suất) của véc tơ ngẫu nhiên $(X_1,X_2,\dots,X_k)$ là $f(s_1,s_2,\dots,s_k)$. Khi đó $f(s_1,s_2,\dots,s_k)=f_1(\mathrm{s}_1).f_2(\mathrm{s}_2)\dots f_k(\mathrm{s}_k)$ khi và chỉ khi $X_1,X_2,\dots,X_k$ là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập.*

Chứng minh.

$(\Rightarrow)$ Giả sử $X_1,X_2,\dots,X_k$ là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập. Khi đó

$f(s_1,s_2,\dots,s_k)=E\left(s_1^{X_1}s_2^{X_2}\dots s_k^{X_k}\right)$

$\Rightarrow f(s_1,s_2,\dots,s_k)=E\left(s_1^{X_1}\right).E\left(s_2^{X_2}\right)\dots E\left(s_k^{X_k}\right)$

(vì $X_1, X_2, \ldots, X_k$ là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập)

Suy ra $f(s_1, s_2, \ldots, s_k) = f_1(s_1).f_2(s_2)\ldots f_k(s_k)$.

$(\Leftarrow)$ Ngược lại, nếu $f(s_1, s_2, \ldots, s_k) = f_1(s_1).f_2(s_2)\ldots f_k(s_k)$.

Suy ra $\sum\limits_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 0}^{\infty} P_{i_1 i_2 \ldots i_k}.s_1^{i_1} s_2^{i_2} \ldots s_k^{i_k} = \left(\sum\limits_{i_1=0}^{\infty} P_{i_1}^1 s_1^{i_1}\right)\left(\sum\limits_{i_2=0}^{\infty} P_{i_2}^2 s_2^{i_2}\right)\ldots\left(\sum\limits_{i_k=0}^{\infty} P_{i_k}^k s_k^{i_k}\right)$

(vì $f(s_1, s_2, \ldots, s_k) = \sum\limits_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 0}^{\infty} P_{i_1 i_2 \ldots i_k}.s_1^{i_1} s_2^{i_2} \ldots s_k^{i_k}$ (xem Nhận xét 2.1) và bài báo [4]).

Suy ra $\sum\limits_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 0}^{\infty} P_{i_1 i_2 \ldots i_k}.s_1^{i_1} s_2^{i_2} \ldots s_k^{i_k} = \sum\limits_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 0}^{\infty} P_{i_1}^1 P_{i_2}^2 \ldots P_{i_k}^k.s_1^{i_1} s_2^{i_2} \ldots s_k^{i_k}$.

Do đó $P_{i_1 i_2 \ldots i_k} = P_{i_1}^1 P_{i_2}^2 \ldots P_{i_k}^k, \forall (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in$ N^k, N là tập hợp số tự nhiên.

Suy ra $\sum\limits_{i_1=0}^{n_1}\sum\limits_{i_2=0}^{n_2}\cdots\sum\limits_{i_k=0}^{n_k} P_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \left(\sum\limits_{i_1=0}^{n_1} P_{i_1}^1\right).\left(\sum\limits_{i_2=0}^{n_2} P_{i_2}^2\right)\ldots\left(\sum\limits_{i_k=0}^{n_k} P_{i_k}^k\right)$, với $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tùy ý.

Suy ra $X_1, X_2, \ldots, X_k$ là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập (theo Bổ đề 2.1).

Nhận xét 2.2. Nếu $f_1(s_1), f_2(s_2), \ldots, f_k(s_k)$ là các hàm dẫn xuất của các đại lượng ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_k$; còn $f(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ là hàm sinh (xác suất) của véc tơ ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ thì $f(1,1,\ldots,1,s_p,1,\ldots,1)$ là hàm dẫn xuất của đại lượng ngẫu nhiên X_p, với $1 \le p \le k$.

Nhận xét 2.3. Nếu $f_1(s_1), f_2(s_2), \ldots, f_k(s_k)$ là các hàm dẫn xuất của các đại lượng ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_k$; còn $f(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ là hàm sinh (xác suất) của véc tơ ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ thì $f(s, s, \ldots, s)$ là hàm dẫn xuất của đại lượng ngẫu nhiên $X_1 + X_2 + \ldots + X_k$.

Nhận xét 2.4. Nếu (X, Y) là véc tơ ngẫu nhiên hai chiều với hàm sinh (xác suất) là $f(s,t)$ thì phân phối xác suất của véc tơ ngẫu nhiên đó được xác định như sau:

$X \backslash Y$	0	1	2	…
0	$f(0,0)$	$\frac{C_1^0}{1!}\frac{\partial f}{\partial t}\Big\vert(0,0)$	$\frac{C_2^0}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Big\vert(0,0)$	…
1	$\frac{C_1^1}{1!}\frac{\partial f}{\partial s}\Big\vert(0,0)$	$\frac{C_2^1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}\Big\vert(0,0)$	$\frac{C_3^1}{3!}\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t^2}\Big\vert(0,0)$	…
2	$\frac{C_2^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\Big\vert(0,0)$	$\frac{C_3^2}{3!}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2 \partial t}\Big\vert(0,0)$	$\frac{C_4^2}{4!}\frac{\partial^4 f}{\partial s^2 \partial t^2}\Big\vert(0,0)$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Nghĩa là $P_{ij} = \dfrac{C_{i+j}^{i}}{(i+j)!} \cdot \dfrac{\partial^{i+j} f}{\partial s^i \partial t^j}\bigg|(0,0)$.

Điều này hiển nhiên vì $\sum_{i,j=0}^{\infty} P_{ij}.s^i.t^j$ chính là khai triển Taylor tại điểm $(0,0)$ của hàm sinh (xác suất) $f(s,t)$. Như vậy nếu biết hàm sinh (xác suất) của véc tơ ngẫu nhiên thì véc tơ ngẫu nhiên đó hoàn toàn xác định.

Ví dụ 2.1. Xét $f(s,t) = e^{-a_1 - a_2 - b + a_1 s + a_2 t + bst}$, với $a_1, a_2, b > 0$.

Dễ thấy $f(s,t) = e^{a_1(s-1)} e^{a_2(t-1)} e^{b(st-1)}$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_1^i.e^{-a_1}}{i!}.s^i\right)}_{(1)} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_2^j.e^{-a_2}}{j!}.s^j\right)}_{(2)} \underbrace{\left(\sum_{b=0}^{\infty} \frac{b^k.e^{-b}}{k!}.(st)^k\right)}_{(3)}$$

Các hệ số của chuỗi (1), chuỗi (2) và chuỗi (3) đều dương do đó các hệ số của chuỗi tích cũng đều dương. Mặt khác tổng các hệ số của chuỗi tích tức chuỗi khai triển Taylor của hàm $f(s,t)$ tại điểm $(0,0)$ bằng $f(1,1) = e^0 = 1$. Vậy $f(s,t)$ là hàm sinh (xác suất) của véc tơ ngẫu nhiên (X,Y).

Đặt $\varphi(s) = f(s,1) = e^{a_1(s-1)} e^{b(s-1)} = e^{(a_1+b)(s-1)}$, ta có $\varphi(s)$ là hàm dẫn xuất của đại lượng ngẫu nhiên X có phân phối Poisson với tham số $a_1 + b$.

Đặt $\psi(s) = f(1,t) = e^{a_2(t-1)} e^{b(t-1)} = e^{(a_2+b)(t-1)}$, ta có $\psi(s)$ là hàm dẫn xuất của đại lượng ngẫu nhiên Y có phân phối Poisson với tham số $a_2 + b$.

Ta nói véc tơ ngẫu nhiên (X,Y) có "phân phối Poisson kép".

Đặc biệt, nếu $b = 0$ thì $f(s,t) = e^{a_1(s-1)}.e^{a_2(t-1)} = \varphi(s).\psi(t)$. Khi đó X,Y là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập.

Định lý 2.2. (xem [1] và [3]) *Nếu X,Y là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập và có phân phối xác suất Poisson thì đại lương ngẫu nhiên $X+Y$ cũng có phân phối xác suất Poisson.*

Chứng minh.

Đặt $f(s,t)$; $f_1(s)$ và $f_2(t)$ lần lượt là hàm sinh (xác suất) của véc tơ ngẫu nhiên (X,Y); đại lượng ngẫu nhiên X và đại lượng ngẫu nhiên Y.

Do X,Y là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập nên $f(s,t) = f_1(s).f_2(t)$. Lại do X,Y là hai đại lượng ngẫu nhiên có phân phối xác suất Poisson nên

$f_1(s) = e^{a_1(s-1)}$ và $f_2(t) = e^{a_2(t-1)}$ (xem bài báo [1]).

Suy ra $f(s,s) = e^{a_1(s-1)}.e^{a_2(s-1)} = e^{(a_1+a_2)(s-1)}$ là hàm dẫn xuất của đại lương ngẫu nhiên $X+Y$ (xem Nhận xét 2.3).

Do đó $X+Y$ là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối xác suất Poisson với tham số (a_1+a_2).

3. KẾT LUẬN

Như vậy chúng tôi đã chứng minh được một số tính chất của hàm sinh (xác suất) của véc tơ ngẫu nhiên nhận các giá trị nguyên, không âm và tổng của hai đại lượng ngẫu nhiên có phân phối xác suất Poisson nếu chúng là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập và cùng có phân phối xác suất Poisson.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Mạnh Hùng (2020), Một số tính chất cơ bản của hàm dẫn xuất, *Tạp chí khoa học Trường Đại học Hồng Đức*, số 51.

[2] Phạm Văn Kiều (2000), *Xác suất thống kê*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.

[3] Feller W. (1957), *An Introduction to Variational the probability theory and its applications,* V. I. 2nd ed. John Wiley and Sons, Inc., New York; Chapman and Hall, Ltd., London.

[4] Kagan A. M., Linnik Yu. V., Rao R. (1972), *Các bài toán đặc trưng của thống kê toán học (Tiếng Nga)*, Moskva, "Nauka".

SOME BASIC PROPERTIES FOR GENERATING FUNCTIONS OF NON-NEGATIVE, INTEGER RANDOM VECTORS

Nguyen Manh Hung

ABSTRACT

In this paper, we present some properties generating functions of non-negative, integer random vectors.

Keywords: *Generating function, Random vector receiving integer and non-negative values.*

** Ngày nộp bài: 12/7/2021; Ngày gửi phản biện: 27/8/2021; Ngày duyệt đăng: 11/10/2021*