p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

ỨNG DỤNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH TRONG PHÂN TÍCH CÂN BẰNG LƯU LƯỢNG CỦA MẠNG LƯỚI GIAO THÔNG

Hoàng Văn Quang[1], Lê Xuân Dũng[2]

TÓM TẮT

Bài báo xây dựng một số mô hình mạng lưới giao thông dưới dạng đồ thị có hướng và trình bày việc ứng dụng hệ phương trình tuyến tính trong phân tích cân bằng lưu lượng của các mạng lưới giao thông này.

Từ khóa: *Hệ phương trình tuyến tính, đồ thị có hướng, lưu lượng giao thông, mạng lưới giao thông.*

DOI: *https://doi.org/10.70117/hdujs.84.2.2026.1118*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Mạng lưới giao thông (mạng lưới) là một trong những hệ thống phức tạp điển hình trong đời sống kinh tế-xã hội, bao gồm các nút (đại diện cho các giao lộ hoặc các điểm, khu vực ra-vào của phương tiện giao thông) và các cung có hướng (đại diện cho các đoạn đường). Sự di chuyển của phương tiện trong mạng lưới được mô tả thông qua các luồng lưu lượng, thoả mãn các định luật bảo toàn tại các nút và các ràng buộc về hướng trên các cung của mạng lưới [6][7]. Do tính chất phức tạp và quy mô lớn của mạng lưới, việc phân tích, dự báo và điều khiển giao thông đòi hỏi phải xây dựng các công cụ toán học phù hợp, cho phép mô tả đồng thời cấu trúc mạng lưới và hành vi định lượng của lưu lượng phương tiện trong mạng lưới [1].

Trong bối cảnh đó, đại số tuyến tính cung cấp một công cụ tự nhiên và hiệu quả để mô hình hoá và phân tích các mạng lưới giao thông thông qua hệ phương trình tuyến tính và các ma trận liên quan [2][8]. Bài báo tập trung trình bày bài toán cân bằng lưu lượng trong mạng lưới giao thông [7][9], đây là một trong những vấn đề thực tiễn cơ bản ảnh hưởng đến tình hình giao thông hiện nay, đặc biệt ở những khu đô thị đông đúc dân cư. Phương pháp chính của bài báo là mô hình hoá mạng lưới giao thông dưới dạng một đồ thị có hướng, từ đó thiết lập hệ phương trình tuyến tính, trong đó mỗi phương trình là phương trình cân bằng lưu lượng tại các giao lộ [2][3].

Ngoài phần đặt vấn đề, bài báo chia thành hai mục bao gồm: Mục 2 giới thiệu một số kiến thức cơ bản về hệ phương trình tuyến tính, đồ thị có hướng và mạng lưới giao thông. Mục 3 trình bày kết quả chính của bài toán về phân tích cân bằng lưu lượng của một số mô hình mạng lưới giao thông thường gặp trong các đô thị hiện nay.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và tính chất về hệ phương trình tuyến tính, đồ thị có hướng và mạng lưới giao thông.

---

[1]*Tổ Toán - Tin, Trường trung học phổ thông Đào Duy Từ, Thanh Hoá.*

[2]*Phòng QLKH,CN&HTQT, Trường Đại học Hồng Đức; E-mail: lexuandung@hdu.edu.vn*

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Định nghĩa 2.1. ([8]) Một *hệ phương trình tuyến tính* gồm *m* phương trình với *n* ẩn số trên trường số thực $\mathbb{R}$ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

trong đó $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các biến số (ẩn số), gọi tắt là biến (ẩn); $a_{ij} \in \mathbb{R}$ là các hệ số đã biết tương ứng của các biến x_i với $1 \le i \le m$ và $1 \le j \le n$; $b_i \in \mathbb{R}$ là các hệ số tự do (không phải là hệ số của biến). Nếu $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$, ta có hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{2}$$

hệ này được gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất *liên kết* với hệ phương trình tuyến tính (1).

Định nghĩa 2.2. ([8]) Cho hệ phương trình tuyến tính (1). Ta gọi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

lần lượt là *ma trận hệ số* và *ma trận mở rộng* của hệ phương trình (1). Đặt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

b^T được gọi là *cột hệ số tự do* của hệ phương trình tuyến tính (1). Khi đó, hệ phương trình (1) và hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (2) lần lượt được viết lại dưới dạng $Ax^T = b^T$ và $Ax^T = 0$.

Tiếp theo ta trình bày một số khái niệm liên quan đến đồ thị có hướng và đồ thị có hướng liên thông.

Định nghĩa 2.3. ([3]) Một *đồ thị có hướng* là một cặp *G* = (*V*,*E*), trong đó $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ là một tập hữu hạn các *đỉnh* và $E \subseteq V \times V$ là một tập các *cung* (cạnh có hướng).

Mỗi cung $e = (u, v) \in E$ biểu diễn một quan hệ có hướng từ đỉnh *u* đến đỉnh *v*, trong đó *u* được gọi là *đỉnh đầu* và *v* được gọi là *đỉnh cuối* của cung *e*.

Định nghĩa 2.4. ([3, 4]) Một đồ thị có hướng *G* = (*V*,*E*) được gọi là *liên thông yếu* nếu với mọi cặp đỉnh phân biệt $u, v \in V$, tồn tại một dãy đỉnh $u = v_0, v_1, \ldots, v_k = v$ sao cho với mỗi $i = 0, 1, \ldots, k-1,$ hoặc $(v_i, v_{i+1}) \in E$ hoặc $(v_{i+1}, v_i) \in E.$

 p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Định nghĩa 2.5. ([3, 4]) Cho đồ thị có hướng *G* = (*V*,*E*). Một *đường đi có hướng* từ đỉnh v_0 đến đỉnh v_k là một dãy hữu hạn các đỉnh $(v_0, v_1, \dots, v_k)$, sao cho với mọi $i = 0, 1, \dots, k-1,$ ta có $(v_i, v_{i+1}) \in E.$ Số cung k được gọi là *độ dài* của đường đi. Nếu các đỉnh $v_0, v_1, \dots, v_k$ đôi một khác nhau thì đường đi được gọi là *đường đi đơn*.

Định nghĩa 2.6. ([2, 3, 4]) Cho đồ thị có hướng *G* = (*V*,*E*). Một *chu trình có hướng* trong *G* là một dãy các đỉnh phân biệt $v_1, v_2, \dots, v_k$ $(k \geq 2)$ sao cho $(v_i, v_{i+1}) \in E$ với $i = 1, \dots, k-1,$ $(v_k, v_1) \in E.$

Nói cách khác, một chu trình có hướng là một đường đi có hướng khép kín, trong đó đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối và không có đỉnh nào khác bị lặp lại.

Định nghĩa 2.7. ([2, 4]) Một đồ thị có hướng *G* = (*V*,*E*) được gọi là *liên thông mạnh* nếu với mọi cặp đỉnh $u, v \in V$, tồn tại một đường đi có hướng từ *u* đến *v* và đồng thời tồn tại một đường đi có hướng từ *v* đến *u*.

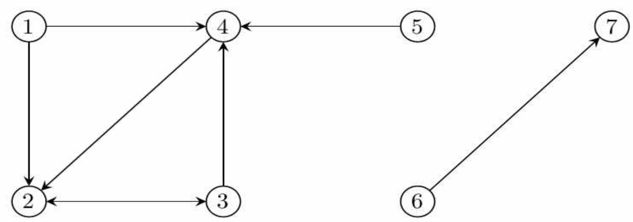
Định nghĩa 2.8. ([3]) Cho đồ thị có hướng *G* = (*V*,*E*) và một đỉnh $v \in V$.

i) *Bậc vào* của *v*, ký hiệu $\deg^{+}(v)$, là số cung trong *E* có đỉnh cuối là *v*.

ii) *Bậc ra* của *v*, ký hiệu $\deg^{-}(v)$, là số cung trong *E* có đỉnh đầu là *v*.

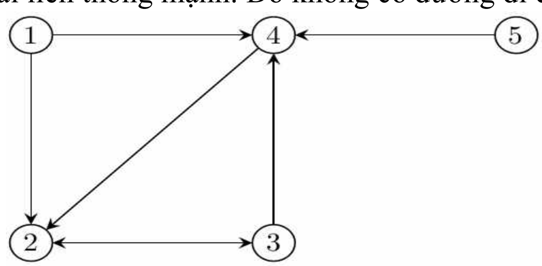
Để cho gọn và không sợ nhầm lẫn trong ký hiệu của đồ thị *G*, ta có thể đồng nhất đỉnh v_i với *i*, nghĩa là $V = \{1, 2, \dots, n\}$ và mỗi cung $e \in E$ có dạng (*i*,*j*).

Ví dụ 2.9. Cho đồ thị có hướng *G* gồm các đỉnh *V* = {1,2,3,4,5,6,7} và các cung {(1,2), (2,3), (3,2), (3,4), (1,4) (5,4), (6,7)} như Hình 1. Ta có *G* là đồ thị có hướng không liên thông, do không có cung nào nối giữa hai đỉnh 5 và 6.



Hình 1

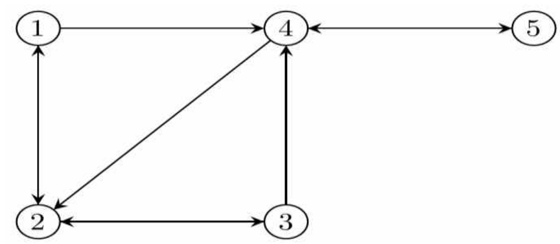
Sau khi bỏ đi hai đỉnh 6, 7 ta nhận được đồ thị mới là đồ thị *G'* có tập đỉnh là *V'* = {1,2,3,4,5} và các cung {(1,2), (2,3), (3,2), (3,4), (1,4), (5,4)} như Hình 2, là đồ thị liên thông nhưng không phải liên thông mạnh. Do không có đường đi có hướng từ 4 đến 5.



Hình 2

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Ví dụ 2.10. Cho đồ thị có hướng G'' gồm các đỉnh $V = \{1,2,3,4,5\}$ và các cung $\{(1,2),$ $(2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (1,4), (5,4), (4,5)\}$ như Hình 3 là đồ thị có hướng liên thông mạnh.



Hình 3

Ngoài ra, ta có bậc vào của đỉnh 4 là $\deg^{+}(4) = 3,$ do có ba cung (1,4), (3,4) và (5,4). Bậc ra của đỉnh 4 là $\deg^{-}(4) = 2,$ do có hai cung (4,2) và (4,5).

Từ đó, ta có mạng lưới giao thông được mô tả qua đồ thị có hướng như sau:

Định nghĩa 2.11. ([4][5]) Một *mạng lưới giao thông có hướng* được mô hình hoá bởi một đồ thị có hướng $G = (V,E)$, trong đó $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ là tập các nút (giao lộ) và $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là tập các đoạn đường có hướng.

Kí hiệu $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ và $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ là tập hợp các ma trận cấp $n \times m$ trên trường số thực.

Định nghĩa 2.12. ([6][7]) Với mỗi đoạn đường $e_j \in E$, ta gán một biến x_j biểu thị *lưu lượng* (số xe trên một đơn vị thời gian). Vectơ $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *vectơ lưu lượng giao thông*.

Định nghĩa 2.13. ([2, 8]) Ma trận *liên thuộc có hướng* của mạng giao thông G có m nút và n cung là ma trận $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}),$ trong đó

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{nếu } e_j \text{ đi ra từ nút } v_i, \\ 1, & \text{nếu } e_j \text{ đi vào nút } v_i, \\ 0, & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Nhận xét 2.14. Mỗi cột của ma trận B chỉ có hai phần tử khác không là 1 và -1.

3. PHÂN TÍCH CÂN BẰNG LƯU LƯỢNG GIAO THÔNG

Trong mục này, ta nghiên cứu bài toán cân bằng lưu lượng trong mạng lưới giao thông được mô hình hoá dưới dạng đồ thị có hướng. Bằng việc thiết lập các phương trình bảo toàn lưu lượng tại các nút giao, các bài toán giao thông thực tiễn được quy về việc giải một hệ phương trình tuyến tính. Nghiệm của hệ phương trình này cho phép xác định lưu lượng giao thông trên các đoạn đường trong một khoảng thời gian khảo sát xác định, chẳng hạn như giờ cao điểm, qua đó cung cấp cơ sở toán học cho việc đề xuất các phương án điều tiết nhằm hạn chế ùn tắc giao thông.

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Định nghĩa 3.1. ([1][7]) Vectơ $d=(d_1,\ldots,d_m)\in\mathbb{R}^m$ được gọi là *vectơ ra-vào* của một mạng lưới giao thông có *m* nút, trong đó:

i) $d_i>0$ biểu thị nút *i* là *nút ra* (phát sinh lưu lượng),

ii) $d_i<0$ biểu thị nút *i* là *nút vào* (hấp thụ lưu lượng),

iii) $d_i=0$ biểu thị nút *i* là *nút trung gian*.

Nhận xét 3.2. d_i đo bằng xe/đơn vị thời gian ($i=1,2,\ldots,m$).

Nhận xét 3.3. (Nguyên lý bảo toàn phương tiện) Trong một mạng lưới giao thông được mô hình hoá dưới dạng đồ thị có hướng, tại mỗi nút giao trung gian (không đóng vai trò ra hoặc vào), tổng lưu lượng phương tiện đi vào nút bằng tổng lưu lượng phương tiện đi ra khỏi nút trong cùng một khoảng thời gian quan sát.

Nhận xét 3.4. (Nguyên lý bảo toàn phương tiện dạng tổng quát [1][7]) Tại mỗi nút v_i của mạng lưới giao thông, hiệu giữa tổng lưu lượng phương tiện đi ra và tổng lưu lượng phương tiện đi vào bằng lượng phương tiện được sinh ra hoặc hấp thụ tại nút đó trong khoảng thời gian xét.

Từ đó ta có phát biểu về bài toán cân bằng lưu lượng giao thông như sau:

Định nghĩa 3.5. ([1][6][7]) Bài toán *cân bằng lưu lượng giao thông* là tìm vectơ lưu lượng $x\in\mathbb{R}^n$ thoả mãn hệ phương trình tuyến tính $Bx^T=d$, trong đó *B* là ma trận liên thuộc có hướng của mạng lưới giao thông và *d* là vectơ ra-vào.

Nhận xét 3.6.

i) x_j là lưu lượng trên đoạn đường thứ *j*, đơn vị xe/đơn vị thời gian ($j=1,2,\ldots,n$).

ii) Phương trình $(Bx^T)_i=d_i$ chính là phương trình cân bằng ra-vào tại nút *i* $\left(i=1,2,\ldots,m\right)$.

Định lý 3.7. ([1][2][8]) Giả sử *G* = (*V*,*E*) là một đồ thị có hướng *liên thông yếu* gồm *m* nút và *n* cung, và $B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ là ma trận liên thuộc có hướng của *G*. Khi đó hệ phương trình tuyến tính $Bx=d$ có nghiệm khi và chỉ khi $\sum_{i=1}^{m}d_i=0.$

Chứng minh. Theo Nhận xét 2.14, ta có mỗi cột của ma trận *B* có đúng một phần tử bằng 1 và một phần tử bằng -1, nên tổng các hàng của *B* bằng vectơ không. Suy ra $\sum_{i=1}^{m}(Bx^T)_i=0$ với mọi *x*. Do đó, điều kiện cần là $\sum_{i=1}^{m}d_i=0.$ Giả sử $\sum_{i=1}^{m}d_i=0$ và đồ thị *G* liên thông yếu. Ký hiệu: $V^+=\{i\in V|\ d_i>0\},\qquad V^-=\{j\in V|\ d_j<0\}.$

Các nút trong V^+ là nút vào, các nút trong V^- là nút ra. Do *G* liên thông yếu, với mỗi cặp $(i,j)\in V^+\times V^-$ tồn tại một đường đi (bỏ hướng) nối *i* với *j*. Chọn một hướng phù hợp trên đường đi đó và gán một lưu lượng dương trên các cung của đường đi. Ta phân phối dần lưu lượng từ các nút vào tới các nút ra sao cho tại mỗi bước:

i) lưu lượng rời khỏi các nút nguồn giảm đúng lượng $d_i>0$,

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

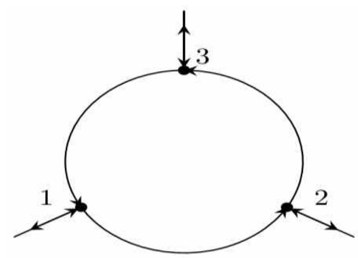
ii) lưu lượng đi vào các nút thoát tăng đúng lượng $-d_j$,

iii) các nút trung gian luôn thoả mãn cân bằng lưu lượng.

Vì tổng lượng ra bằng tổng lượng vào, quá trình này kết thúc sau hữu hạn bước và thu được một vectơ lưu lượng *x* thoả mãn $Bx = d$.

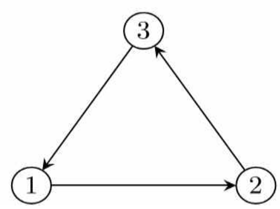
Định nghĩa 2.11 mô hình hoá mạng lưới giao thông dưới dạng đồ thị có hướng, qua đó cho phép mô tả cấu trúc và hướng di chuyển của phương tiện một cách trực quan bằng ngôn ngữ đồ thị. Trên cơ sở mô hình này, việc thiết lập và giải các hệ phương trình tuyến tính tương ứng cho phép phân tích và xác định lưu lượng giao thông trên các cung của mạng. Trong phần cuối của bài báo, chúng tôi trình bày và phân tích chi tiết một số mô hình giao thông quen thuộc trong các đô thị hiện nay, bao gồm mô hình vòng xuyến, mạng lưới gồm ba nút và mạng lưới gồm bốn nút.

Mô hình 3.8. (Vòng [1][6][7]) *Vòng xuyến* là mô hình mạng lưới giao thông trong đó hệ thống đường được biểu diễn bởi một đồ thị có hướng *G* = (*V*,*E*) chứa ít nhất một chu trình có hướng khép kín, đại diện cho luồng giao thông chuyển động tuần hoàn theo một chiều xác định. Vòng xuyến có 3 nút ra-vào:



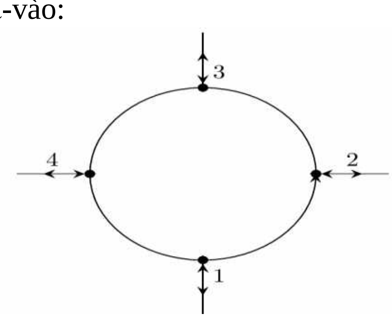
Hình 4

được mô tả bằng đồ thị G có hướng gồm các đỉnh $V = \{1, 2, 3\}$ và các cung {(1,2), (2,3), (3,1)} như Hình 5.



Hình 5

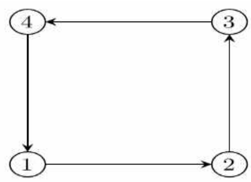
Vòng xuyến có 4 nút ra-vào:



Hình 6

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

được mô tả bằng đồ thị G có hướng gồm các đỉnh $V = \{1,2,3,4\}$ và các cung {(1,2), (2,3), (3,4), (4,1}} như Hình 7.



Hình 7

Ví dụ 3.9. Giả sử xét vòng xuyến gồm 4 nút 1, 2, 3, 4 (Hình 7). Trong thời gian quan sát ta thấy: nút 1 ra 120 xe/giờ, nút 2 ra 80 xe/giờ, nút 3 vào 60 xe/giờ, nút 4 vào 140 xe/giờ. Giả sử lưu lượng xe trên cung (1,2), (2,3), (3,4), (4,1) lần lượt là $x_{12}, x_{23}, x_{34}, x_{41} \geq 0$ (xe/giờ). Khi đó hệ phương trình:

$$\begin{cases} -x_{12} + x_{41} = 120 \\ x_{12} - x_{23} = 80 \\ x_{23} - x_{34} = 60 \\ x_{34} - x_{41} = 140. \end{cases}$$

Ma trận của hệ là:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

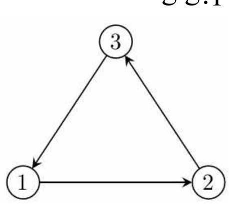
Giải hệ phương trình tuyến tính trên ta được:

$$x_{12} = t - 120, x_{23} = t - 200, x_{34} = t - 140, x_{41} = t.$$

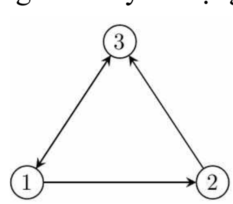
Như vậy lưu lượng xe tối thiểu trên cung (1,2) là 80 xe/giờ, (3,4) là 60 xe/giờ, (4,1) là 200 xe/giờ. Giả sử tại thời điểm tan ca, lưu lượng xe trên cung (4,1) là 300 xe/giờ, khi đó lưu lượng xe trên các cung (1,2), (2,3), (3,4) lần lượt là 180, 100 và 160 xe/giờ.

Mô hình 3.10. (Mô hình mạng lưới giao thông 3 nút) Mô hình mạng lưới giao thông 3 nút được biểu diễn bởi một đồ thị có hướng $G = (V,E)$, trong đó $V = \{1, 2, 3\}$ là tập các nút giao thông và E là tập các cung nối giữa các nút. Với mỗi cung $(i, j) \in E,$ ký hiệu x_{ij} là lưu lượng giao thông (xe/đơn vị thời gian) đi từ nút *i* đến nút *j*. Tại mỗi nút $i \in V,$ ta gán một đại lượng $b_i \in \mathbb{N}$ ứng với nút *i*.

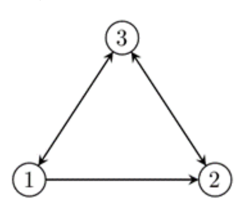
Ta thường gặp mạng lưới này có dạng đồ thị như sau:



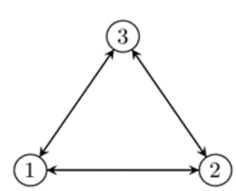
Hình 8



Hình 9



Hình 10



Hình 11

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

Hình 8 là mạng lưới giao thông 3 nút có các cung đường là cung một chiều, chính là vòng xuyến gồm 3 nút ra-vào; Hình 9 là mô hình mạng lưới giao thông Ngã Ba bia thuộc phường Hạc Thành, tỉnh Thanh Hoá; Hình 11 là mạng lưới giao thông 3 nút có các cung biểu thị đường hai chiều.

Ví dụ 3.11. Giả sử mạng lưới giao thông 3 nút như Hình 9. Trong thời gian quan sát ta thấy: nút 1 ra 200 xe/giờ, nút 2 ra 80 xe/giờ, nút 3 vào 280 xe/giờ. Giả sử lưu lượng xe trên cung (1,2), (1,3), (3,1), (2,3) lần lượt là $x_{12}, x_{13}, x_{31}, x_{23} \geq 0$ (xe/giờ). Khi đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -x_{12} - x_{13} + x_{31} = -200 \\ x_{12} - x_{23} = -80 \\ x_{13} - x_{31} + x_{23} = 280. \end{cases}$$

Ma trận của hệ là:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

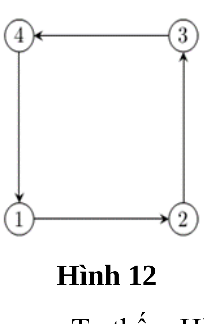
Giải hệ phương trình tuyến tính ta được:

$$x_{12} = a - 80, x_{13} = -a + b + 280, x_{23} = a, x_{31} = b.$$

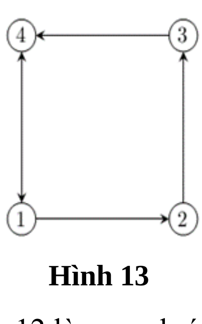
Như vậy lưu lượng xe tối thiểu trên cung (2,3) là 80 xe/giờ.

Mô hình 3.12. (Mô hình mạng lưới giao thông 4 nút) Mô hình mạng lưới giao thông gồm 4 nút được biểu diễn bởi một đồ thị có hướng *G* = (*V*,*E*), trong đó *V* = {1,2,3,4} là tập các nút giao thông và *E* là tập các cung nối giữa các nút. Với mỗi cung $(i, j) \in E$, ký hiệu x_{ij} là lưu lượng giao thông (xe/đơn vị thời gian) đi từ nút *i* đến nút *j*. Tại mỗi nút $i \in V$, ta gán một đại lượng $b_i \in \mathbb{N}$ ứng với nút *i*.

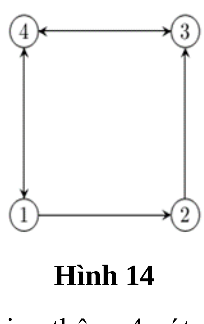
Ta thường gặp mạng lưới này có dạng đồ thị như sau:



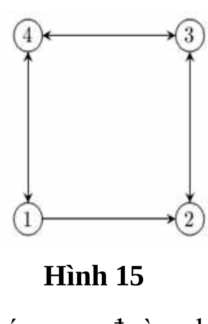
Hình 12



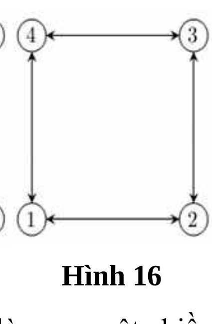
Hình 13



Hình 14



Hình 15



Hình 16

Ta thấy, Hình 12 là mạng lưới giao thông 4 nút có các cung đường là cung một chiều chính là vòng xuyến gồm 4 nút ra-vào; Hình 16 là mạng lưới giao thông 4 nút có các cung biểu thị đường hai chiều.

Ví dụ 3.13. Giả sử mạng lưới giao thông 4 nút như Hình 13. Trong thời gian quan sát ta thấy: nút 1 ra 100 xe/giờ, nút 2 ra 180 xe/giờ, nút 3 vào 120 xe/giờ và nút 4 vào 160 xe/giờ. Giả

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

sử lưu lượng xe trên cung (1,2), (2,3), (3,4), (4,1), (1,4) lần lượt là $x_{12}, x_{23}, x_{34}, x_{41}, x_{14} \geq 0$ (xe/giờ). Khi đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -x_{12} + x_{41} - x_{14} = -100 \\ x_{12} - x_{23} = -180 \\ x_{34} - x_{41} + x_{14} = 160. \end{cases}$$

Ma trận của hệ là:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giải hệ phương trình tuyến tính ta được:

$$x_{12} = a - b + 100, x_{23} = a - b + 280, x_{34} = a - b + 160, x_{41} = a, x_{14} = b.$$

Như vậy nếu lưu lượng xe cung (4,1) và (1,4) bằng nhau thì lưu lượng xe trên cung (1,2) là 100 xe/giờ, trên cung (2,3) là 280 xe/giờ và trên cung (3,4) là 160 xe/giờ.

Trong phần cuối của bài báo này, ta xét mạng lưới giao thông có mô tả là đồ thị có hướng như hình 2.

Ví dụ 3.14. Giả sử mạng lưới giao thông Hình 2. Trong thời gian quan sát ta thấy: nút 1 ra 100 xe/giờ, nút 2 vào 150 xe/giờ, nút 3 ra 120 xe/giờ và nút 4 vào 260 xe/giờ và nút 5 ra 190 xe/giờ. Giả sử lưu lượng xe trên cung (1,2), (1,4), (2,3), (3,2), (3,4), (4,2), (5,4) lần lượt là $x_{12}, x_{14}, x_{23}, x_{32}, x_{34}, x_{42}, x_{54} \geq 0$ (xe/giờ). Khi đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -x_{12} - x_{14} = -100 \\ x_{12} - x_{23} + x_{32} + x_{42} = 150 \\ x_{23} - x_{32} - x_{34} = -120 \\ x_{14} + x_{34} - x_{42} + x_{54} = 260 \\ -x_{54} = -190. \end{cases}$$

Ma trận của hệ là:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Giải hệ phương trình tuyến tính trên ta được:

$$x_{12} = b - c + 30, x_{14} = -b + c + 70, x_{23} = a + b - 120,$$
$$x_{32} = a, x_{34} = b, x_{42} = c, x_{54} = 190.$$

Như vậy tổng lưu lượng xe trên cung (1,2) và (1,4) là 100 xe/giờ, trên cung (3,2) và (3,4) là 120 xe/giờ và trên cung (5,4) là 190 xe/giờ.

p-ISSN 3030 - 4628
e-ISSN 3030 - 4636

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, J. B. Orlin (1993), *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall.
[2] N. Biggs (1993), *Algebraic Graph Theory*, 2nd ed., Cambridge University Press.
[3] B. Bollobás (1998), *Modern Graph Theory*, Springer.
[4] R. Diestel (2017), *Graph Theory*, 5th ed., Springer.
[5] M. E. J. Newman (2010), *Networks: An Introduction*, Oxford University Press.
[6] J. de D. Ortúzar, L. G. Willumsen (2011), *Modelling Transport*, 4th ed., Wiley.
[7] Y. Sheffi (1985), *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*, Prentice Hall.
[8] G. Strang (2006), *Linear Algebra and Its Applications*, 4th ed., Brooks/Cole.
[9] R. J. Vanderbei (2020), *Linear Programming: Foundations and Extensions*, 5th ed., Springer.

APPLICATIONS OF SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS IN THE ANALYSIS OF TRAFFIC FLOW EQUILIBRIUM IN TRANSPORTATION NETWORKS

Hoang Van Quang, Le Xuan Dung

ABSTRACT

This paper constructs several transportation network models in the form of directed graphs and presents the application of systems of linear equations to the analysis of traffic flow equilibrium in these transportation networks.

Keywords: *Systems of linear equations, directed graphs, traffic flow, transportation networks.*

** Ngày nộp bài:26/12/2025; Ngày gửi phản biện: 26/12/2025; Ngày duyệt đăng: 28/2/2025*